Beijing 2008

北京2008年奥运会
文具独家供应商

BEIFA
贝发文具 金牌品质

8mm

BEIFA' is awarded thetitles of National Celebrated Export Commodity To Be Given Special Support, National Celebrated Produt In Writing Instrument Manufacturing Industry, Provincial Celebrated Product In Zhejiang Province, Provincial

B5

NOTEBOOK

高等微积分

代数与几何

No.

Date . .

山穷水复疑无路
柳暗花明又一村

No.

Date

一、线性空间

1. 线性空间公理化定义

V：非空集合；F：域

$\begin{cases} \langle V:+\rangle & +\text{是取决于}\alpha_1、\alpha_2\text{的二元运算} \\ \langle F\times V:*\rangle & *\text{是取决于}\lambda\text{的一元运算} \end{cases}$

$\begin{cases} \langle V:+\rangle\text{是交换群：}+\text{的封闭性，结合律、交换律，唯一单位元，任意元素唯一逆元} \\ \langle F\times V:*\rangle:(\lambda,\alpha)\mapsto\lambda\alpha\in V. \end{cases}$

$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，$\forall\lambda,\mu\in F$，$1$为$F$中关于$*$的单位元，有

$$\begin{cases} 1\vec{\alpha}=\vec{\alpha} \\ \lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha} \\ (\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha} \\ \lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \end{cases}$$

称V对于$+$(加法)、$*$(数乘)两种运算在域F上构成一个线性空间.

简称V为域F上的线性空间. $V(F)$.

2. 线性空间的基和维数及向量在基下的坐标.

线性相关性的定义：$V(F)$为线性空间，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m\in V$，若$\exists$不全为零

的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in F$，使 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vdots \\ \vec{\alpha}_m\end{pmatrix}=\vec{0}$

则称$\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m$线性相关，否则线性无关.

$\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m$中有一个向量可由其余向量在域$F$上线性表示，则线性相关

$\Leftrightarrow$ $\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m$中任一向量不能由其余向量在域$F$上线性表示，则线性无关.

定理：若向量组$\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n\}$线性无关，则其任一子集也线性无关；

若向量组$\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n\}$线性相关，则任一包含它的向量组也线性相关.

证明：1) 设子集为$\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_k\}$ $k<n$，若$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\vec{\alpha}_k=\vec{0}$，则必有$\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$

否则$\exists$不全为零的$\lambda_1\cdots\lambda_k$使$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_k\vec{\alpha}_k+0\vec{\alpha}_{k+1}+\cdots+0\vec{\alpha}_n=\vec{0}$，矛盾.

2) $\exists$不全为0的$\lambda_1\cdots\lambda_n$使$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$，$\therefore\exists\lambda_{n+1}\cdots\lambda_m$ $(m>n)$，使.

$\lambda_1\vec{\alpha}_1+\cdots+\lambda_n\vec{\alpha}_n+\lambda_{n+1}\vec{\alpha}_{n+1}+\cdots+\lambda_m\vec{\alpha}_m=\vec{0}$ 而$\lambda_1\cdots\lambda_m$不全为0.

定理：设 $V(F)$ 中向量组 $\{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_s}\}$ 的每个向量可由另一向量组 $\{\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_r}\}$ 线性表示，若 $s>r$，则 $\{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_s}\}$ 线性相关；

若 $\{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_s}\}$ 线性无关，则 $s\le r$.

证明：1) 设 $\vec{\beta_j}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}\vec{\alpha_i}$（其中 $\lambda_{ij}\in F$，$j=1,2,\cdots,s$），

又设 $x_1\vec{\beta_1}+x_2\vec{\beta_2}+\cdots+x_s\vec{\beta_s}=\vec{0}$.

$\therefore \sum_{j=1}^{s}x_j\vec{\beta_j}=\sum_{j=1}^{s}x_j\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}\vec{\alpha_i}\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}x_j\right)\vec{\alpha_i}=\vec{0}$

令 $\vec{\alpha_i}$ $(i=1,\cdots,r)$ 前的系数皆为 0，$\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}x_j=0$（$r$ 个方程）.

$\because s>r$

$\therefore$ 方程组必有非零解

$\therefore \{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_s}\}$ 线性相关.

2) 是 1) 的逆否命题.

① 线性空间的维数、基.

若线性空间 $V(F)$ 的有限子集 $B=\{\vec{\alpha_1},\cdots\vec{\alpha_n}\}$ 线性无关，且 $L(B)=V$，

则 B 为 V 的一组基，n 为 V 的维数，即 $\dim V=n$.

证明：若 $V(F)$ 的线性无关的两个子集 $B_1=\{\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_n}\}$ 和 $B_2=\{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_m}\}$ 都能张成 $V(F)$，则 $\vec{\beta_j}\in V(F)=L(\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_n})$，$(j=1,\cdots,m)$，故 $m\le n$，

对称地有 $n\le m$，故 $m=n$.

② 向量组的秩

设 S 是 $V(F)$ 的一个子集，若 S 中 $\exists$ 线性无关向量组 $B=\{\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_r}\}$，且 S 中每个向量可由 B 线性表示，则 B 中向量的个数为 S 的秩，$\operatorname{rank} S=r$.

极大无关组的求法：矩阵的阶梯标准形

③ 向量在一组基下的坐标

B 是 $V(F)$ 的一组基，$B=\{\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta_n}\}$，若 V 中的 $\vec{\alpha}=a_1\vec{\beta_1}+\cdots+a_n\vec{\beta_n}$，则

No.

Date . .

$(a_1,\cdots,a_n)\in F^n$ 为 $\vec{\alpha}$ 在基 B 下的坐标.

设 $B_1=\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n\}$, $B_2=\{\vec{\beta}_1\cdots\vec{\beta}_n\}$ 是 $V(F)$ 的任意两组基.

设 $\begin{cases}\vec{\beta}_1=a_{11}\vec{\alpha}_1+\cdots+a_{n1}\vec{\alpha}_n\\ \vec{\beta}_2=a_{12}\vec{\alpha}_1+\cdots a_{n2}\vec{\alpha}_n\\ \vdots\\ \vec{\beta}_n=a_{1n}\vec{\alpha}_1+\cdots+a_{nn}\vec{\alpha}_n\end{cases}$ 则 $(\vec{\beta}_1,\cdots\vec{\beta}_n)=(\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

即 $\cancel{B_2=AB_1}$ $B_2=B_1A$.

若 $\vec{\alpha}=B_1\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=B_1\vec{X}$, 且 $\vec{\alpha}=B_2\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=B_2\vec{Y}$.

则 $B_1\vec{X}=B_2\vec{Y}=B_1A\vec{Y}$. $\therefore \vec{X}=A\vec{Y}$, $\vec{Y}=A^{-1}\vec{X}$.

$\therefore$ $\cancel{\vec{X}=B_1^{-1}AB_1\vec{Y}}$, $\cancel{\vec{Y}=B_2^{-1}A^{-1}B_2\vec{X}}$

3. ~~线~~ 线性子空间.

设 W 是 $V(F)$ 的非空子集, 若 W 对 V 中的运算也构成域 F 上的线性空间, 则 W 为 V 的子空间.

$\begin{cases}\text{平凡子空间: } \operatorname{rank}W=\operatorname{rank}V\\ \text{非平凡子空间: } \operatorname{rank}W<\operatorname{rank}V.\end{cases}$

定理: 若~~向量~~ W 是 n 维线性空间 V 的一个子空间, 则 W 的基可扩充为 V 的基 (即 W 的基可添加 V 中若干向量成为 V 的基).

证明: 设 W 的基 $B=\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m\}$, 而 V 的维数为 $n>m$, 必存在 $\vec{\alpha}_{m+1}\in V$ 使 $\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1}\}$ 线性无关, 否则 $\dim V<n$, 矛盾. 若 $m+1=n$, 得证, 若 $m+1<n$, 继续在 B_1 中添加线性无关向量, 必存在 $\vec{\alpha}_{m+2},\cdots,\vec{\alpha}_n\in V$ 使 $\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m,\vec{\alpha}_{m+1},\cdots\vec{\alpha}_n\}$ 线性无关, 为 V 的基.

定理: $V(F)$ 的非空子集为 V 的子空间的充要条件是 W 对 $V(F)$ 的线性运算封闭.

证明: 必要性: 若不封闭, 则 W 关于 V 的运算不构成线性空间.

No.

Date

充分性：∵ W是V的子集，∴ V(F)中数乘和加法的运算规律对W都成立，只需证V的零元 $\vec{0}\in W$，W中每个元素的逆元 $-\vec{\alpha}\in W$.

∵ W对数乘封闭

∴ $\lambda=0$、$\lambda=-1$ 时

$0\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}\in W$，$(-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha}\in W$

∴ W是V(F)的子空间.

4. 子空间的交与和

① 交与和、直和.

交：$W_1\cap W_2=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}\in W_1 且 \vec{\alpha}\in W_2\}$

和：$W_1+W_2=\{\vec{\alpha}\mid\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_1\in W_1, \vec{\alpha}_2\in W_2\}$

W_1、W_2的交与和仍是V的子空间.

证明：1) 设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\in W_1$ 且 $\in W_2$，∴ $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\in W_1$（$W_1$是线性空间）

同理 $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\in W_2$ ∴ $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\in W_1\cap W_2$.

2) 设 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}\in W_1+W_2$，即存在 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\beta}_1\in W_1$，$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\beta}_2\in W_2$ 使

$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，$\vec{\beta}=\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$

∴ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)+(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)=(\vec{\alpha}_1+\vec{\beta}_1)+(\vec{\alpha}_2+\vec{\beta}_2)\in W_1+W_2$.

$\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}_1+\lambda\vec{\alpha}_2\in W_1+W_2$

∴ W_1+W_2是V(F)的一个子空间.

直和：W_1、W_2是V(F)两个子空间，若 $W_1\cap W_2=\{\vec{0}\}$，则 W_1+W_2 叫 W_1与W_2的直和：$W_1\oplus W_2$.

② 维数公式：$\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$.

若 W_1+W_2 是直和，则 $\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1+W_2)$.

证明：设 $\dim W_1=s$，$\dim W_2=t$，$\dim(W_1\cap W_2)=r$

No.

Date . .

设 $W_1\cap W_2=L(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_r})$

$W_1=L(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_r},\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta}_{s-r})$

$W_2=L(\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_r},\vec{\gamma_1}\cdots\vec{\gamma}_{t-r})$

$\therefore W_1+W_2=L(\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_r},\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta}_{s-r},\vec{\gamma_1}\cdots\vec{\gamma}_{t-r})$ 只要证 $\dim(W_1+W_2)=s+t-r$.

设 $a_1\vec{\alpha_1}+\cdots+a_r\vec{\alpha_r}+b_1\vec{\beta_1}+\cdots+b_{s-r}\vec{\beta}_{s-r}+c_1\vec{\gamma_1}+\cdots+c_{t-r}\vec{\gamma}_{t-r}=\vec{0}$

即 $a_1\vec{\alpha_1}+\cdots+a_r\vec{\alpha_r}+b_1\vec{\beta_1}+\cdots+b_{s-r}\vec{\beta}_{s-r}=-c_1\vec{\gamma_1}-\cdots-c_{t-r}\vec{\gamma}_{t-r}$

上式的两端分别属于 W_1 和 W_2，由于有等号，所以它们都属于 $W_1\cap W_2$.

$\therefore$ 可设 $-c_1\vec{\gamma_1}-\cdots-c_{t-r}\vec{\gamma}_{t-r}=d_1\vec{\alpha_1}+\cdots+d_r\vec{\alpha_r}$.

即 $c_1\vec{\gamma_1}+\cdots+c_{t-r}\vec{\gamma}_{t-r}+d_1\vec{\alpha_1}+\cdots+d_r\vec{\alpha_r}=\vec{0}$.

上式为 W_2 的基的线性组合 $\therefore c_1=\cdots=c_{t-r}=d_1=\cdots=d_r=0$.

$\therefore a_1\vec{\alpha_1}+\cdots+a_r\vec{\alpha_r}+b_1\vec{\beta_1}+\cdots+b_{s-r}\vec{\beta}_{s-r}=\vec{0}$

上式为 W_1 的基的线性组合 $\therefore a_1=\cdots=a_r=b_1=\cdots=b_{s-r}=0$.

$\therefore \vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_r},\vec{\beta_1}\cdots\vec{\beta}_{s-r},\vec{\gamma_1}\cdots\vec{\gamma}_{t-r}$ 线性无关.

求 S_1+S_2：求出 S_1、S_2 的基 B_1, B_2，再解出 B_1 B_2 的极大无关组.

求 $S_1\cap S_2$：联立 S_1 S_2 求基.

求 S_1 的补空间：先确定补空间维数，再利用行列式为 0 不确定补空间的基.

二. 线性映射1 —— Hugo图的理论.

1. 定义

从线性空间 $V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 的一个映射 σ 对 $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V_1$, $\forall \lambda, \mu \in F$, 有 $\sigma(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}) = \lambda\sigma(\vec{\alpha})+\mu\sigma(\vec{\beta})$, 则 σ 是线性映射.

△ 从线性空间 V 到自身的线性映射 σ: V 上的线性变换.

△ 从线性空间 V 到域 F 的线性映射 f: V 上的线性函数.

△ 从 $V\times V$ 到 F 的映射, 若满足

$f(\vec{\alpha}, k_1\vec{\beta_1}+k_2\vec{\beta_2}) = k_1 f(\vec{\alpha}, \vec{\beta_1})+k_2 f(\vec{\alpha}, \vec{\beta_2})$

$f(k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}, \vec{\beta}) = k_1 f(\vec{\alpha_1}, \vec{\beta})+k_2 f(\vec{\alpha_2}, \vec{\beta})$: V 上的双(重)线性函数.

△ 从 V^n 到 F 的线性(类似于上式)映射: V 上的多重线性函数(如n阶行列式

R^2 上的线性变换把直线变为直线: (A、B、C三点共线的条件: $\vec{OC} = \lambda\vec{OA}+(1-\lambda)\vec{OB}$)

记 $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ $\vec{OB}=\vec{\beta}$ $\vec{OC}=\vec{\gamma}$, $\sigma(\vec{\alpha})=\vec{OA'}$ $\sigma(\vec{\beta})=\vec{OB'}$ $\sigma(\vec{\gamma})=\vec{OC'}$.

$\therefore \sigma(\vec{\gamma}) = \sigma(\lambda\vec{\alpha}+(1-\lambda)\vec{\beta}) = \lambda\sigma(\vec{\alpha})+(1-\lambda)\sigma(\vec{\beta})$

$\therefore \vec{OC'} = \lambda\vec{OA'}+(1-\lambda)\vec{OB'}$.

反过来, R^2 中把直线变为直线的变换不都是线性的(下面要讲的仿射变换).

若 V 中向量组 $\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_m}$ 线性相关, 则 $\sigma(\vec{\alpha_1})\cdots\sigma(\vec{\alpha_m})$ 线性相关, 反之不成立.

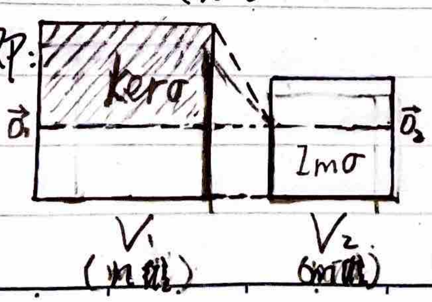
2. 线性映射的像与核

设 σ 是 $V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 的线性映射.

则 σ 的像(值域) $= \mathrm{Im}\,\sigma = \sigma(V_1) = \{\vec{\beta} \mid \vec{\beta}=\sigma(\vec{\alpha}), \vec{\alpha}\in V_1\}$

σ 的核(V_2 零元素的完全原像) $= \mathrm{Ker}\,\sigma = \sigma^{-1}(\vec{0_2}) = \{\vec{\alpha} \mid \sigma(\vec{\alpha})=\vec{0_2}, \vec{\alpha}\in V_1\}$.

即:



No.
Date

3. 线性映射的运算：乘法、加法、数乘.

① 线性映射的乘积、和可逆线性映射的逆映射是线性映射.

1) $V_1 \xrightarrow{\sigma_1} V_2$，$V_2 \xrightarrow{\sigma_2} V_3$．则 $V_1 \xrightarrow{\sigma_2\sigma_1} V_3$．　设 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta} \in V_1$

证明：$\sigma_2\sigma_1(\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}) = \sigma_2(\lambda\sigma_1(\vec{\alpha})+\mu\sigma_1(\vec{\beta}))$

$= \lambda(\sigma_2(\sigma_1(\vec{\alpha}))) + \mu(\sigma_2(\sigma_1(\vec{\beta})))$

$= \lambda(\sigma_2\sigma_1)(\vec{\alpha}) + \mu(\sigma_2\sigma_1)(\vec{\beta})$.

2) $V_1 \xrightarrow{\sigma} V_2$，$V_2 \xrightarrow{\sigma^{-1}} V_1$，$\sigma^{-1}\sigma = I_{V_1}$，$\sigma\sigma^{-1} = I_{V_2}$　$\vec{\beta_1}$，$\vec{\beta_2} \in V_2$.

证明：$\sigma^{-1}(\lambda_1\vec{\beta_1}+\lambda_2\vec{\beta_2}) = \sigma^{-1}[\lambda_1(\sigma\sigma^{-1})(\vec{\beta_1}) + \lambda_2(\sigma\sigma^{-1})(\vec{\beta_2})]$

$= \sigma^{-1}[\sigma(\lambda_1\sigma^{-1}(\vec{\beta_1})+\lambda_2\sigma^{-1}(\vec{\beta_2}))]$

$= \lambda_1\sigma^{-1}(\vec{\beta_1}) + \lambda_2\sigma^{-1}(\vec{\beta_2})$.

② V_1到V_2的所有线性映射的集合 $L(V_1, V_2)$ 是一个线性空间.

其中加法：$(\sigma+\tau)(\vec{\alpha}) = \sigma(\vec{\alpha}) + \tau(\vec{\alpha})$

数乘：$\lambda\sigma(\vec{\alpha}) = \lambda\sigma(\vec{\alpha})$

证明：$(\sigma+\tau)(\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2}) = \sigma(\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2}) + \tau(\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2})$

$= \lambda_1(\sigma+\tau)(\vec{\alpha_1}) + \lambda_2(\sigma+\tau)(\vec{\alpha_2})$.

$(\lambda\sigma)(\lambda_1\vec{\alpha_1}+\lambda_2\vec{\alpha_2}) = \lambda(\lambda_1\sigma(\vec{\alpha_1})+\lambda_2\sigma(\vec{\alpha_2}))$

$= \lambda_1(\lambda\sigma)(\vec{\alpha_1}) + \lambda_2(\lambda\sigma)(\vec{\alpha_2})$.

∴ $L(V_1, V_2)$ 对加法与数乘构成F上的一个线性空间.

又∵ 同维的线性~~映射~~空间同构，即 m维→n维的线性映射只有一维(m、n为确定的整数)．∴ $L(V_1, V_2)$ 的维数为线性空间 V_1 的维数与线性空间 V_2 的维数的和.

即 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ 有 rank V_1 种可能、$\mathrm{Im}\,\sigma$ 有 rank V_2 种可能.

③ $\langle L(V_1, V_2); +\rangle$ 是交换群　$\langle L(V_1, V_2); \circ\rangle$ 是含幺半群 (幺：恒等映射).

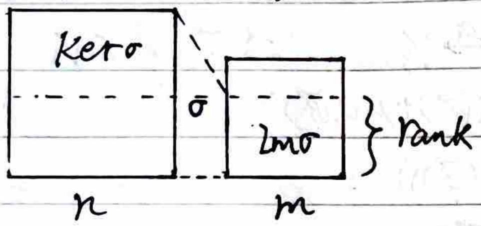
线性变换 $L(V, V)$ 与 $+$、$\circ$ 的代数系统 $\langle L(V, V); +, \circ\rangle$ 是含幺环…

No.

Date

4. 线性映射的秩.

def: $r(\sigma)=\dim\sigma(V_1)$.



$\therefore r(\sigma)+\dim(\ker\sigma)=n$.

定理: 设 V_1、V_2、V_3 分别是 m、n、s 维线性空间，$\sigma\in L(V_1,V_2)$，$\tau\in L(V_2,V_3)$

则 $\operatorname{rank}(\sigma)+\operatorname{rank}(\tau)-n\le\operatorname{rank}(\tau\sigma)\le\min(\operatorname{rank}(\sigma),\operatorname{rank}(\tau))$.

证明: 右边: $\because\sigma(V_1)\subset V_2$ $\therefore(\tau\sigma)(V_1)\subset\tau(V_2)$

$\therefore\dim(\tau\sigma)(V_2)\le\dim\tau(V_2)$ $\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)\le\operatorname{rank}(\tau)$

又 $\because\tau\sigma(V_1)=\tau(\sigma(V_1))$ $\therefore\dim(\tau\sigma)(V_1)\le\dim\sigma(V_1)$

$\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)\le\operatorname{rank}(\sigma)$.

$\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)\le\min(\operatorname{rank}(\sigma),\operatorname{rank}(\tau))$.

左边: $\because\operatorname{rank}(\sigma)+\dim\ker\sigma=m$,

$\operatorname{rank}(\tau)+\dim\ker\tau=n$,

$\operatorname{rank}(\tau\sigma)+\dim\ker(\tau\sigma)=m$.

$\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)+\dim\ker(\tau\sigma)=\operatorname{rank}(\sigma)+\dim\ker\sigma$.

$\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)=\operatorname{rank}(\sigma)+\dim\ker\sigma-\dim\ker(\tau\sigma)$.

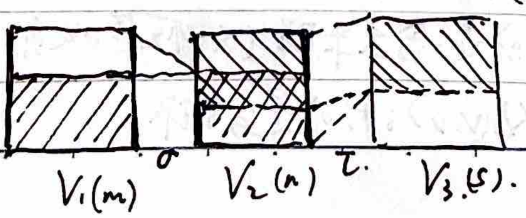
$\because\ker\sigma\cap\sigma(V_1)=\{0\}$

$\therefore\operatorname{rank}(\tau(\ker\sigma))\le\dim\ker\sigma$.

又 $\because\operatorname{rank}(\tau(\ker\sigma))=\operatorname{rank}(\tau)-\operatorname{rank}(\tau\sigma)$

$\therefore\operatorname{rank}(\tau\sigma)=\operatorname{rank}(\sigma)+\dim\ker\sigma-\dim\ker(\tau\sigma)\ge\operatorname{rank}(\sigma)+\operatorname{rank}(\tau)-\operatorname{rank}(\tau\sigma)-\dim\ker(\tau\sigma)$

$=\operatorname{rank}(\sigma)+\operatorname{rank}(\tau)-n$.



定理：$\sigma, \tau \in L(V_1, V_2)$，则 $\text{rank}(\sigma+\tau) \le \text{rank}(\sigma) + \text{rank}(\tau)$.

相当于两个像空间的和　可能有重叠的部分.

证明：$\because \forall \vec{\beta} \in (\sigma+\tau)(V_1)$，$\exists\ \vec{\alpha} \in V_1$，使 $\vec{\beta} = (\sigma+\tau)(\vec{\alpha}) = \sigma(\vec{\alpha}) + \tau(\vec{\alpha})$

$\in \sigma(V_1) + \tau(V_1)$

$\therefore (\sigma+\tau)(V_1) \subset \sigma(V_1) + \tau(V_1)$

$\therefore \dim(\sigma+\tau)V_1 \le \dim[\sigma(V_1) + \tau(V_1)] \le \dim \sigma(V_1) + \dim \tau(V_1)$.

线性映射与其基像的关系：

① 唯一性：两个不同线性映射作用于基上的像不全同.

证明：若 $\sigma(\vec{\alpha}_i) = \tau(\vec{\alpha}_i)$　$i = 1, \dots, n$，（$B = \{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 为 V_1 的基.）

则 $\forall \vec{\xi} = x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n \in V_1$，都有

$\sigma(\vec{\xi}) = x_1\sigma(\vec{\alpha}_1) + \cdots + x_n\sigma(\vec{\alpha}_n) = x_1\tau(\vec{\alpha}_1) + \cdots + x_n\tau(\vec{\alpha}_n)$

$= \tau(x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n) = \tau(\vec{\xi})$.　$\therefore \sigma = \tau$.

② 线性性：$B = \{\vec{\alpha}_1, \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 是 V_1 的基，$S = \{\vec{\beta}_1, \cdots \vec{\beta}_n\}$ 是 V_2 的基，则 $\sigma(\vec{\alpha}_i) = \vec{\beta}_i$ 是线性的.

证明：对 $\forall \vec{\xi} = x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + x_n\vec{\alpha}_n \in V_1$

规定 $\sigma(\vec{\xi}) = x_1\vec{\beta}_1 + \cdots + x_n\vec{\beta}_n$.

$\because \forall \vec{\xi}_1 = b_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + b_n\vec{\alpha}_n$，$\vec{\xi}_2 = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n$ 和 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$，有

$\sigma(\lambda_1\vec{\xi}_1 + \lambda_2\vec{\xi}_2) = \sigma\left((\lambda_1 b_1 + \lambda_2 c_1)\vec{\alpha}_1 + (\lambda_1 b_2 + \lambda_2 c_2)\vec{\alpha}_2 + \cdots + (\lambda_1 b_n + \lambda_2 c_n)\vec{\alpha}_n\right)$

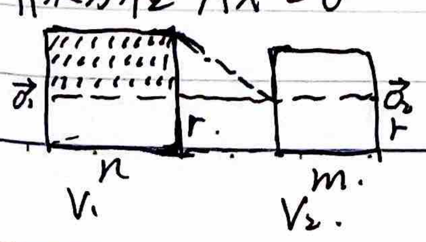
$= (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 c_1)\vec{\beta}_1 + \cdots + (\lambda_1 b_n + \lambda_2 c_n)\vec{\beta}_n$

$= \lambda_1(b_1\vec{\beta}_1 + \cdots + b_n\vec{\beta}_n) + \lambda_2(c_1\vec{\beta}_1 + \cdots + c_n\vec{\beta}_n)$

$= \lambda_1\sigma(\vec{\xi}_1) + \lambda_2\sigma(\vec{\xi}_2)$

5. 线性映射的一个模型——线性方程组的求解.

① 齐次方程 $A\vec{X} = \vec{0}$.



$\vec{X} \in \text{Ker}\,\sigma$ ($\sim \ker A$).

$\dim \text{Ker}\,\sigma = n - r$.

No.

Date

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left.\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}\right\} m个0. \qquad (*).$$

把 $A\in M_{m\times n}(F)$ 的n个列向量 $\vec{\beta}_1\cdots\vec{\beta}_n$ 张成的子空间 $L(\vec{\beta}_1\cdots\vec{\beta}_n)$ 叫A的列空间 $R(A)$，A的m个行向量 $\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m$ 张成的子空间 $L(\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_m)$ 叫A的行空间 $R(A^T)$. $R(A)$ 是 F^m 的子空间（向量有m维）、$R(A^T)$ 是 F^n 的子空间（向量有n维，即 $\forall \vec{\alpha}_i\in R(A^T)$ 含n个元素）.

△ (*)式可表示为

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

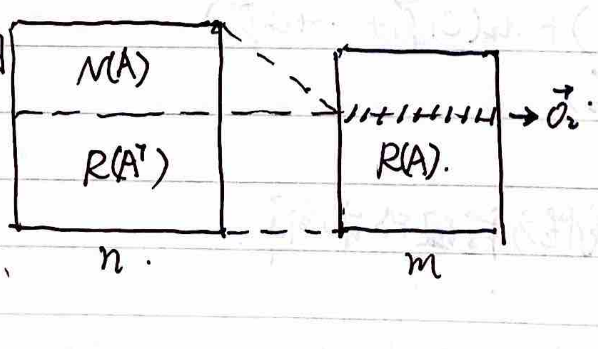
~~∵ $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解空间是 $R(A)$ 的子空间，$N(A)\subset R(A)$，$\dim N(A)\le \dim R(A)$.~~

事实上，$\dim N(A)=n-r$，$\dim R(A)=r$.

△ (*)式还可表示为

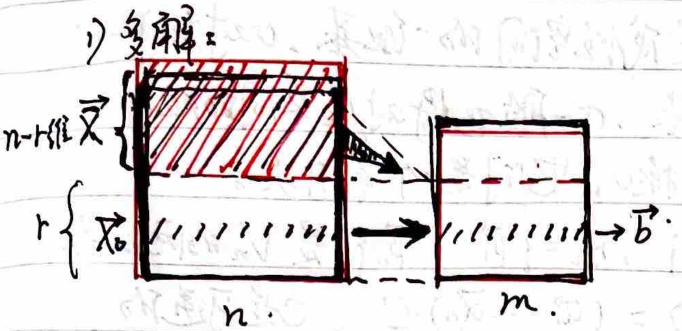
$$(a_{j1} \cdots a_{jn})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0 \quad j=1,2,\dots,m,$$ ∴ $(\vec{\alpha}_i, \vec{x})=0$. $R(A^T)$ 与 $N(A)$ 是正交子空间. $N(A)=(R(A^T))^T$.

Hugo图



② 非齐次方程 $A\vec{x}=\vec{b}$.

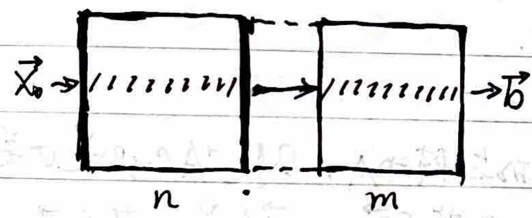
1) 多解:



$\vec{b}$: V_2 (m维) 中的向量, $\vec{x}$: A的解空间 N(A), 齐次方程的通解.

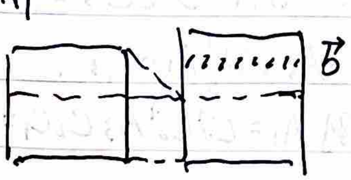
$\vec{x_0}$: 非齐次方程的一个特解, 特解有 r维 (如Hugo图, 每一维 $R(A^T)$ 中都有一个 $\vec{x_0}$ 与 $\vec{b}$ 对应).

2). 一解:



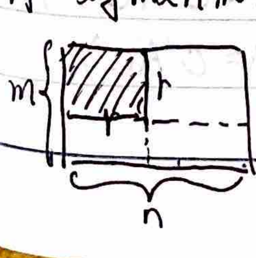
n=m. A是可逆矩阵, 有唯一确定的 $\vec{x_0}$ 与 $\vec{b}$ 对应, $\vec{x_0}=A^{-1}\vec{b}$.

3). 无解.



没有 $\vec{x_0}\in V_1$ 与 $\vec{b}\in V_2$ 相对应.

说明: 对m×n的矩阵A, 将其消成~~相~~坐标准形. (行变换: 数乘, 加减, 交换).



则 r×r 部分是满秩的映射部分, m−r 行的向量是对应 V_1 中Ker的部分, n−r 列是对应 V_2 中没被映射到的维 (消失的维) 像在那些维上的坐标全是零.

三. 线性映射2 —— 线性变换及其相似标准型.

1. 相似矩阵等价类.

对于线性变换 $\sigma \in L(V,V)$，给定线性空间的一组基，σ 对应于一个确定的矩阵A，对于V的不同基，σ 一般也将对应不同的矩阵；而这些矩阵对应同一个线性变换σ，它们是一个等价类。

△ 设 $\sigma \in L(V,V)$，$B_1=\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$，$B_2=\{\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n\}$ 是 V_n 的两组基，

1) 设基变换矩阵为C：$(\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n) = (\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)C$，C是可逆的

$\therefore (\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n) = (\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n)C^{-1}$

设σ在B_1下对应的矩阵为$A \in M_n(F)$

$\therefore$ 线性变换（映射）可形式地表示为 $\sigma(\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n) = (\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)A$.

$\therefore \sigma((\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n)C^{-1}) = ((\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n)C^{-1})A$.

$\therefore (\sigma(\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n))C^{-1} = (\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n)(C^{-1}A)$

$\therefore \sigma(\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n) = (\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n)(C^{-1}AC)$.

可见，σ在B_2下对应的矩阵为$C^{-1}AC$

2) 反之，若σ在基 $B_1=\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵为A，则$C^{-1}AC$必是σ关于另一个基$\{\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n\}$所对应的矩阵，且基$\{\vec{\beta}_1 \cdots \vec{\beta}_n\}$是由基$\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$经可逆矩阵C右乘而得.

3) 自反性：$\forall A \in M_n(F)$. $A \sim A$：$A = E^{-1}AE$.

对称性：$\forall A, B \in M_n(F)$，若$A \sim B$，则$B \sim A$：若$A = C^{-1}BC$，则$B = (C^{-1})^{-1}AC^{-1}$

传递性：$\forall A_1, A_2, A_3 \in M_n(F)$，若 $A_1 \sim A_2$，$A_2 \sim A_3$，则$A_1 \sim A_3$：

若 $A_1 = C_1^{-1}A_2C_1$ $\quad A_2 = C_2^{-1}A_3C_2$ $\quad$ 则 $A_1 = C_1^{-1}C_2^{-1}A_3C_2C_1 = (C_2C_1)^{-1}A_3(C_2C_1)$

2. 相似矩阵等价类是否存在最简代表元（对角阵）？—— 条件及求法.

① 首先，我们确定了目标：若σ在基 $B=\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵为A（非对角阵），我们希望找到相应的C，使 $A = C\Lambda C^{-1}$，Λ是对角阵. $(\Lambda = C^{-1}AC)$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

No.
Date

② C是一个基的过度矩阵，已设 $B=\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$，故对应于使σ可表示为对角阵Λ的基为 $(\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)\cdot C^{-1}$，在这组基下有

$$\sigma((\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)C^{-1}) = ((\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)\cdot C^{-1})\cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

设 $(\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)C^{-1} = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$，则 $(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)C^{1} = (\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)$.

$$\sigma(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = (\lambda_1\vec{e}_1 \cdots \lambda_n\vec{e}_n).$$

$\therefore (\sigma(\vec{e}_1), \cdots \sigma(\vec{e}_n)) = (\lambda_1\vec{e}_1 \cdots \lambda_n\vec{e}_n)$

$\therefore \sigma(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i \Rightarrow (\sigma - \lambda_i I)\vec{e}_i = \vec{0}$

表示成矩阵的形式：$(A-\lambda_i E)\vec{x}_i = \vec{0}$. 对于每一个 λ_i, $\vec{x}_i$ 此式都成立，故可统一写成 $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

为使 $\vec{x}$ 有解（将 $\vec{x}_i$ 构成使σ可表为对角阵Λ的那组基），即 $Ker(A-\lambda E) \neq \{\vec{0}\}$，$\therefore |A-\lambda E| = 0$，此式为λ的一元n次方程，唤之特征方程，λ名特征值。

由代数基本定理，λ在复数域上有n个解 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$.

③ 由于 λ_i 有复根或重根，代入 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 后会产生复系数方程或重复的方程，而由于我们的目的是找到实向量组 $(\vec{e}_1 - \vec{e}_n)$（V_n 中的一组基）故我们需确定一些使目标达到的条件.

首先，假设解出的 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 都是实数，代入 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 中，由于 $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 可能有重根，故假定互不相同的λ有m个 $(m \le n)$：$\lambda_{r_1} \cdots \lambda_{r_m}$. 因此可得到m个方程 $(A-\lambda_{r_1}E)\vec{x}=\vec{0} \cdots (A-\lambda_{r_m}E)\vec{x}=\vec{0}$ 皆为齐次方程.

$\because A \in M_n(F)$，故解出的每个（共m个）方程的基础解系都是 V_n 的一个子空间.

④ 下面证明，这些子空间 $\{V_{\lambda_1} \cdots V_{\lambda_m}\}$ 之间没有交（直和）.

△ 证明：欲证 ~~W = VW~~ $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_m}$ 是直和，只需证W中的零向量在每个 V_{λ_i} 中取一个向量的情况下的分解式是唯一的，即

$$\vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2 + \cdots + \vec{\xi}_m = \vec{0}，其中 \vec{\xi}_i \in V_{\lambda_i}$$

No.

Date

归纳法：1) $m=2$ 时，设 $\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2=\vec{0}$ 则 $\sigma(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)=\lambda_1\vec{\xi}_1+\lambda_2\vec{\xi}_2=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{\xi}_1=\vec{0}$

$\because$ $\vec{\xi}_1$ 和 $\vec{\xi}_2$ 是由不同的 λ 代入 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 算得的

$\therefore$ $\lambda_1\neq\lambda_2$，$\therefore$ $\vec{\xi}_1=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{\xi}_2=\vec{0}$.

2) 设 $m-1$ 时结论成立

3) 考虑有 m 个子空间时的情形. 设 $\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_m=\vec{0}$，

$\vec{\xi}_m=-(\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_{m-1})$ $\therefore$ $\sigma(\vec{\xi}_1+\cdots+\vec{\xi}_m)=\lambda_1\vec{\xi}_1+\cdots+\lambda_m\vec{\xi}_m=\vec{0}$

$\therefore$ $(\lambda_1-\lambda_m)\vec{\xi}_1+\cdots+(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\vec{\xi}_{m-1}=\vec{0}$

由归纳假设，$\vec{\xi}_1=\cdots=\vec{\xi}_{m-1}=\vec{0}$ $\therefore$ $\vec{\xi}_m=\vec{0}$

综上所述，W 的零向量只能由属于 V_{λ_i} 中的零向量分解而得 $(i=1,\cdots,m)$

故诸 V_{λ_i} 无交.

⑤ 由于我们目标是，通过解 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 得到的 $\vec{x}$ 可写成 $\{\vec{e}_1\cdots\vec{e}_n\}$

即所有 $\vec{x}$ 组成的向量组的秩是 n，也即所有 V_{λ_i} 的和（直和）构成

V_n. 故我们需要找到这样的条件，使 $\dim(V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_m})=$

$\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_m}=n$.

而这样的条件就是：当 $|A-\lambda E|=0$ 所解出的 λ 没有复根时，每个 λ_{r_i}

的重数（"几重根"）等于 λ_{r_i} 对应的由 $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ 所解出的特征

子空间的维数 $\dim V_{r_i}$。

⑥ 考虑上面的条件，因为假定了 $|A-\lambda E|=0$ 的解 λ 没有复根，根据代数

基本定理，解出的 m 个不同的 λ_{r_i} $(i=1,\cdots,m)$ 的重数和就是 n，设 λ_{r_i}

的重数为 k_i，即 $\sum_{i=1}^{m}k_i=n$.

如果对于每一个 λ_{r_i}，若其重数 k_i 都不小于其对应的特征子空间 V_{r_i} 的

维数（设为 r_i），即 $k_i\geq r_i$，$i=1,\cdots,m$，则当条件成立时，确有

$\sum_{i=1}^{m}k_i=\sum_{i=1}^{k}\dim V_{r_i}=n$. 这样，由 $(A-\lambda E)\vec{x}$ 解出的诸 $\vec{x}$ 就可构成

作为 V_n 的一组基的 $\{\vec{e}_1\cdots\vec{e}_n\}$ 了.

② 事实上，还有 $k_i \ge r_i$，下面证明：

△证明：$\sigma \in L(V,V)$。设 σ 在 V 的某基 $B=\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 下对应的矩阵为 A.

λ_{r_i} 是其 k_i 重特征值，且所有 λ_{r_i} 都是实数，$i=1,\cdots,m$.

设 $\{\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}\}$ 是 λ_{r_i} 对应的特征子空间 V_{r_i} 的基。

将 V_{r_i} 的基扩充为 V_n 的基：$\{\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1}, \cdots, \vec{x}_n\}$，其与 $\{\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n\}$ 是等价向量组.

$\because$ $A\vec{x}_j = \lambda_{r_i}\vec{x}_j$，$j=1,2,\cdots r_i$ 且

$$A\vec{x}_j = b_{1j}\vec{x}_1 + \cdots + b_{r_i j}\vec{x}_{r_i} + b_{r_i+1,j}\vec{x}_{r_i+1} + \cdots + b_{nj}\vec{x}_n$$

$$j = r_i+1, \cdots, n.$$

这是 $\vec{x}_j$（非 V_{r_i} 空间中的）在被 σ 映射后的向量用

被 V_{r_i} 扩充后的 n 维基所表示的形式

$$\therefore A(\vec{x}_1 \cdots, \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1}, \cdots, \vec{x}_n) = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1} \cdots \vec{x}_n)\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_{r_i} & & & b_{1,r_i+1} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_{r_i} & b_{r_i,r_i+1} & \cdots & b_{r_i n} \\ \hline & & & b_{r_i+1,r_i+1} & \cdots & b_{r_i+1,n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n,r_i+1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

$$= (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1} \cdots \vec{x}_n)\begin{bmatrix} \lambda_{r_i}E & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$= (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1} \cdots \vec{x}_n)B$，记 $(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_{r_i}, \vec{x}_{r_i+1} \cdots \vec{x}_n) = P$，

$P \in M_n(F)$ 是基向量组，是可逆矩阵.

$\therefore$ 上式写成 $AP = PB \Rightarrow B = P^{-1}AP$ 故 A、B 相似 $A \sim B$.

$$\therefore |\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \left|\begin{bmatrix} \lambda E_{r_i} & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-r_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{r_i}E & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-\lambda_{r_i})E_{r_i} & -B_1 \\ 0 & \lambda E_{n-r_i} - B_2 \end{vmatrix} = |(\lambda-\lambda_{r_i})E_{r_i}| \cdot |\lambda E_{n-r_i} - B_2|$$

$= (\lambda-\lambda_{r_i})^{r_i}|\lambda E_{n-r_i} - B_2| = 0$. 由于 $|\lambda E_{n-r_i} - B_2|$ 中还可能分解出 $(\lambda-\lambda_{r_i})$ 这一因子，所以 λ_{r_i} 的重数 $k_i \ge r_i$.

No.

Date

3. 总结及推广.

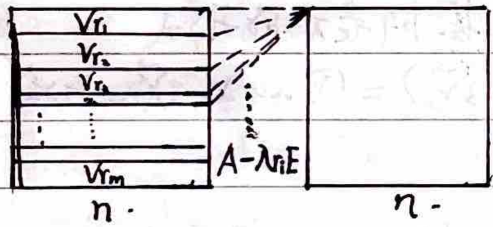
在每个特征子空间的维数等于相应特征值作为特征方程的解的重数时，对应于一特定σ的矩阵A可通过$C^{-1}AC$变为与之相似的对角阵Λ. C为由 $V_{r_1}+V_{r_2}+\cdots+V_{r_m}$ 的基作为列向量排成的基变换矩阵.

由于每个特征子空间V_{r_i}的基不唯一，C是不唯一的，因此，可对角化的线性变换σ也不只在唯一的一组基下对应于对角阵.

① 如果在复数域上考虑A可否对角化，只需有A的每个特征值($\in\mathbb{C}$)的重数等于其特征子空间的维数. 因为根据代数基本定理，λ_{r_i}的重数和就是n.

② 特征子空间的维数 dim ~~ker~~ V_{r_i} 等于 $A-\lambda_{r_i}E$ 的核的维数 $\dim\ker(A-\lambda_{r_i}E)$

图解:



③ 当 dim V_{r_i} 不再与重数(λ_{r_i})相等时，A不能化为对角阵. 与A相似的矩阵的"最简"形式是Jordan形矩阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} \quad \text{其中 } J_i=\begin{bmatrix} \lambda_{r_i} & 1 & & \\ & \lambda_{r_i} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_{r_i} \end{bmatrix} \text{约当块} \quad i=1,2,\cdots m.$$

$|J|=|J_1||J_2|\cdots|J_m| = \lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}\cdots\lambda_m^{r_m}$

约当块不全是一阶的J是不可对角化的. 因为$\lambda_{r_i}E-J_i$的核空间的维数(即特征子空间的维数)总是小于λ_{r_i}的重数.

又∵ $\sum_{i=1}^{m}$ 重数$(\lambda_{r_i})=n$ ∴ $\sum_{i=1}^{m}\dim\ker(\lambda_{r_i}E-J_i)<n$.

可证明: $\forall A\in M_n(F)$, 在复数域上相似于唯一的J(Jordan形矩阵). (J的唯一性不考虑Jordan块排列的次序)，J为A的相似标准形.

又∵ $\text{rank}(\lambda_{r_i}E-J_i)=r_i-1$ (r_i为J_i的阶数，也即J_i的特征值的重数)，

J_i的特征空间维数 ← ∴ $\dim(\ker\lambda_{r_i}E-J_i)=r_i-(r_i-1)=1$. ∴对$P^{-1}AP=J$, P中有m个列向量是A属于$\lambda_{r_1}\cdots\lambda_{r_m}$的特征向量. 反之，若A有m个线性无关的特征向量，则A的约当标准形由m个约当块构成(每个对应一个特征子空间). 当然，当m...时，可能有$\lambda_{r_i}=\lambda_{r_j}$!

四. 线性变换+平移变换→仿射变换.

1.代数定义：平面的一个点变换，如果它在一个不一定正交的坐标系(仿射标架)中表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij})_{2\times2}$ 可逆，则称此点变换为平面仿射变换.

性质①：φ、ψ 为仿射变换，则 $\varphi\circ\psi$ 是仿射变换，φ^{-1} 为仿射变换.

证明：$\begin{cases} \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \varphi\circ\psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi\left[B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right]$

$$= A\left[B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$= AB\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left[A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right]$ ∵A、B可逆，∴AB可逆.
∴ $\varphi\circ\psi$ 是仿射变换.

而 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right] = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - A^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ∵ A^{-1} 可逆
∴ φ^{-1} 是仿射变换.

性质②：仿射变换把直线映为直线，把两平行直线映为两平行直线，把不共线三点映为不共线三点.

证明：设 τ 是仿射变换：$\tau\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix}$

对于直线 l: $ax+by+c = (a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$，有

$(a,b)A^{-1}\begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = 0$，即 $(a,b)A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - (a,b)A^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$

仍是同一仿射标架中的一条直线.

仍设 τ 是仿射变换，设 $l_1 // l_2$. ∵ τ 将直线映为直线
∴ τ 把直线 l_1、l_2 分别映为 l_1' l_2'. 若 l_1' 与 l_2' 交于 M'，则 $\tau^{-1}(M')\in l_1\cap l_2$
与 $l_1 // l_2$ 矛盾，∴ $l_1' // l_2'$

由前两条，第三条易证.

No.

Date

性质③ 设A、B、C是仿射标架中共线的三点，设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，λ叫共线三点A、B、C的简单比，记为 (A,C,B)。则仿射变换保持共线三点的简单比不变。

证明：设 $A=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$\because \overrightarrow{A'B'}=\varphi(B)-\varphi(A)=P\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{B'C'}=P\begin{pmatrix}x_3-x_2\\y_3-y_2\end{pmatrix}$

若有 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_3-x_2\\y_3-y_2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\overrightarrow{A'B'}=P\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}=\lambda P\begin{pmatrix}x_3-x_2\\y_3-y_2\end{pmatrix}=\lambda\overrightarrow{B'C'}$

性质④ 平面上任何不共线的三点组 $\{A,B,C\}$ 和 $\{A'B'C'\}$，存在唯一仿射变换φ：

$\{A,B,C\}\xrightarrow{\varphi}\{A'B'C'\}$.

证明：取坐标系 $\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$，则 $A'=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，即 $\overrightarrow{AA'}=x_0\overrightarrow{AB}+y_0\overrightarrow{AC}$

又 $\begin{cases}\overrightarrow{A'B'}=a_{11}\overrightarrow{AB}+a_{21}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{A'C'}=a_{12}\overrightarrow{AB}+a_{22}\overrightarrow{AC}\end{cases}$ $\quad \because \overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{A'C'}$ 不共线 $\therefore P=(a_{ij})_{2\times2}$ 是可逆的。

令 $\varphi:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ 则 $\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{A'B'}$

唯一性：如果有两个 φ_1、φ_2 $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1:\{A,B,C\}\to\{A,B,C\}$，$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1=I$，即 $\varphi_1=\varphi_2$

2. 几何定义：把共线三点变成共线三点的平面到自身的1-1对应的变换。

可由φ定义仿射变换的向量变换：$\forall A,B\in R^2$，$\varphi(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$.

$\begin{cases}\varphi(\vec{v}+\vec{u})=\varphi(\vec{v})+\varphi(\vec{u})\\ \varphi(\lambda\vec{v})=\lambda\varphi(\vec{v})\end{cases}$

$\begin{cases}A: x_1,y_1 & \varphi\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\\ B: x_2,y_2 & \varphi\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=P_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\end{cases}$ $\quad \therefore \varphi\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}=P_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}-P_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\varphi(\overrightarrow{AB})$.

定理 设仿射变换 τ 在仿射标架 $I=\{O;\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ 中的表示为

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=A$$

对任意不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 有

$$\frac{|\tau(\vec{a})\times\tau(\vec{b})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\left|\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\right|$$

证明：设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，$\tau(\vec{a})=(x_1',y_1')=A\vec{a}$，$\tau(\vec{b})=(x_2',y_2')=A\vec{b}$

$$\therefore\frac{|\tau(\vec{a})\times\tau(\vec{b})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{|A\vec{a}\times A\vec{b}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=|\det A|.$$

推论：若平面上任一有面积区域 D 经过仿射变换变成区域 D'，有

$$\frac{S_{D'}}{S_D}=|\det A|.$$

3. 几何定义与代数定义的等价性.

① 代数定义 $\Rightarrow$ 几何定义

设仿射变换 $\tau(x,y)=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 前已得由 τ 可引起平面的一个向量变换 $\tilde{\tau}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

如果 A、B、C 共线，即 $\exists\lambda$ 使 $\vec{AB}=\lambda\vec{BC}$. 那么 $\vec{A'B'}=\tilde{\tau}(\vec{AB})=A(\vec{AB})$ $\vec{B'C'}=A(\vec{BC})$.

仍满足 $\vec{A'B'}=A(\vec{AB})=A(\lambda\vec{BC})=\lambda A(\vec{BC})=\lambda\vec{B'C'}$ （线性变换）.

$\therefore$ 仿射变换将共线的三点映为共线的三点

下面证 τ 可逆：

$\because A$ 可逆 $\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-A^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ 也是仿射变换（代数定义）.

$\therefore\tau$ 是一一变换

$\therefore$ 代数定义 $\Rightarrow$ 几何定义.

No.

Date

② 几何定义 ⇒ 代数定义.

1) 设τ满足几何定义，先证明由定义可推出，仿射变换τ将不共线三点映为不共线三点.

反证法。假设τ将A、B、C(不共线)映为A'B'C'(共线) 设该直线为l_x.

由几何定义，∀ AB、or BC or AC上的点的像都在l_x上. 对于平面内任一点D 总能作直线DE，使DE与AB、BC分别交于E、F

∵ E、F的像E'F'均在l_x上，又D、E、F共线

∴ D的像D'在l_x上.

∴ τ是$R^2 \mapsto R$的映射 与τ可逆矛盾.

∴ τ将共线三点映为共线三点，将不共线三点映为不共线三点.

2) 下面证τ将平行直线映为平行直线

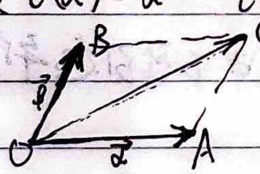
反证法。假设τ将平行直线映成相交直线.

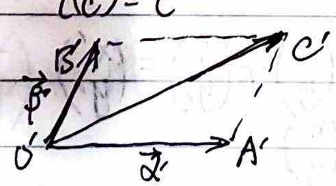
则∃ $A' \in l_1'$ 且 $\in l_2'$ $\tau^{-1}(A') \in l_1$ 且 $\in l_2$ 与 $l_1 // l_2$ 矛盾

∴ τ将平行直线映为平行直线.

3) 由点变换τ可以引起一个向量变换$\tilde{\tau}$，下面证明$\tilde{\tau}$是线性变换.

设 $\tilde{\tau}(\vec{\alpha})=\vec{\alpha'}$ $\tilde{\tau}(\vec{\beta})=\vec{\beta'}$ $\tilde{\tau}(\vec{c})=\vec{c'}$.





∵ $\vec{OA} // \vec{BC}$ $\vec{OB} // \vec{AC}$ 应满足 $\vec{O'A'} // \vec{B'C'}$ $\vec{O'B'} // \vec{A'C'}$

∴ C'是平行四边形O'A'C'B'的一个顶点. ∴ $\vec{O'C'}=\vec{\alpha'}+\vec{\beta'}$

∴ $\tau(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\vec{\alpha'}+\vec{\beta'}$ (*).

下面证明: ∀λ∈R $\tilde{\tau}(\lambda\vec{\alpha})=\lambda\tilde{\tau}(\vec{\alpha})$.

先考虑 $n\in N^*$ 由(*)知 $\tilde{\tau}(n\vec{\alpha})=\vec{\alpha'}+\vec{\alpha'}+\cdots+\vec{\alpha'}=n\vec{\alpha'}=n\tilde{\tau}(\vec{\alpha})$.

再考虑 $n\in Z$ $n<0$时 $\tilde{\tau}(n\vec{\alpha}-n\vec{\alpha})=\tilde{\tau}(\vec{0})=\vec{0}$ ∴ $\tilde{\tau}(-n\vec{\alpha})=-\tilde{\tau}(n\vec{\alpha})=-n\tilde{\tau}(\vec{\alpha})$

No.

Date

再考虑 $m\in Q^+$，m 可表示为 $\frac{k}{n}$，其中 $k、n\in Z$.

$\because \tau(k\vec{\alpha}) = \tau(\frac{k}{n}\cdot n\vec{\alpha}) = n\tau(\frac{k}{n}\vec{\alpha})$ $\quad \therefore k\tau(\vec{\alpha}) = n\tau(\frac{k}{n}\vec{\alpha})$

即 $\tau(m\vec{\alpha}) = m\tau(\vec{\alpha})$.

最后考虑，$\lambda\in R$ 的情况. $\lambda\in R$ 则其可由一有序列 $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n\in Q, n\in N^+)$.

逼近，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. $\tau(\lambda\vec{\alpha}) = \tau(\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n\cdot\vec{\alpha}) = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n\tau(\vec{\alpha}) = \lambda\tau(\vec{\alpha})$.

至此，证明了 τ 是一个 R^2 上的线性映射（※.※※） ※※

4) 在仿射标架 I 中，任取 R^2 的一组基 $\{\vec{e_1}\ \vec{e_2}\}$ 设 $\tau(\vec{e_i}) = \vec{\varepsilon_i}$，$i=1,2$.

即 $\tau(\vec{e_1}\ \vec{e_2}) = (\vec{\varepsilon_1}\ \vec{\varepsilon_2})$. 代入 $\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{\varepsilon_1}\ \vec{\varepsilon_2}$ 在 I 中的坐标

显然 $(\vec{e_1}\ \vec{e_2})$ 是可逆矩阵，$A=(\vec{\varepsilon_1}\cdot\vec{\varepsilon_2})(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})^{-1}$，即为 τ 在仿射标架 I 与基 $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ 下的矩阵表示. 即 $\forall\vec{\alpha}$ $\tau(\vec{\alpha}) = A\vec{\alpha}$.

设 O 为仿射标架 I 的原点，$\tau(0)=0'$ 的坐标设为 $(x_0,y_0)^T$.

$\tau(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{O'B'}$ 设 B 的坐标为 (x,y)，B' 坐标 $(x'\ y')$.

$\therefore \tau\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{pmatrix}$ $\quad\therefore A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$.

$\therefore$ 几何定义 $\Rightarrow$ 代数定义.

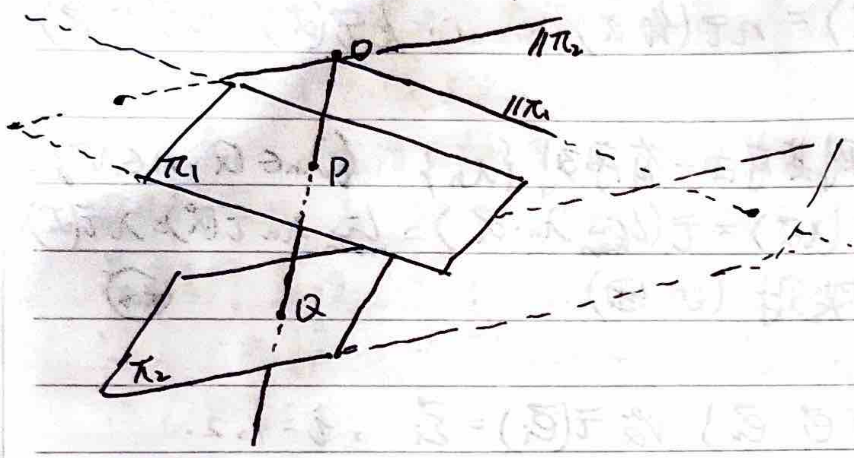
4. 仿射坐标变换（略）.

No.

Date

五. 射影几何.

1. 中心直线把与扩大平面.



中心投影: $\pi_1 \to \pi_2$

- $//\pi_2$的直线: 没有像
- $//\pi_1$的直线: 没有原像

射影: $\pi_1 \to B(O)$

$(P \to OP)$.

$(\infty \to //\pi_1)$

截影: $B(O) \to \pi_2$

$(OQ \to Q)$

$(//\pi_2 \to \infty)$.

① 扩大平面和中心直线把上的"线"结构.

- $\pi_1 \to \pi_1+$: 普通点 + 各方向的无穷远点 (同一直线两端的无穷远点算一个)
- $\pi_2 \to \pi_2+$: 同上.

- $\pi_1 \to \pi_1+$: 原来的直线添加上其一个无穷远点成为π_1+的普通线 +
  所有无穷远点构成的子集是π_1+的无穷远线.
  这个扩充是合理的, 会使中心直线把与扩大平面一一对应的元素关系
- $\pi_2 \to \pi_2+$: 同上.

∴ 中心直线把 { 线 ↔ 点 / 面 ↔ 线 } 扩大平面.

② 点线关联关系.

1) 两点决定一条线

- 普通点 + 普通点 → 普通线 (含无穷远点).
- 普通点 + 无穷远点 → 普通线 (含无穷远点)
- ~~普~~ 无穷远点 + 无穷远点 → 无穷远线.

No.
Date

3). 任何两条不同的线交于一点

$\begin{cases} \text{原相交直线} \to \text{交于普通点（两无穷远点不同）} \\ \text{原平行直线} \to \text{交于无穷远点（两无穷远点相同）} \\ \text{普通线}+\text{无穷远线} \to \text{无穷远点} \end{cases}$

∴"点"与"线"的关系变得对称

∴扩大平面上只保留了点与线的关联关系及由此产生的点的共线、线的共点

中心直线把上：点线的关联关系就是通常意义下直线和平面的关系（过 O）

2. 射影坐标系

1) 中心直线把上的射影坐标系

在空间中取定以 O 为原点的仿射标架 $[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}]$（三个不共面向量）后

$B(O)$ 中每个元素对应一个三联比（$a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3} \Rightarrow \langle a_1, a_2, a_3\rangle$）

这是个一一对应，但由于没有"单位点"，$B(O)$ 中的元素的度量都不唯一。

∴如下定义射影标架：

取定 $B(O)$ 中 4"点" $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ 使任何 3 个不共线"（⇒ 一般位置点组），

取定空间非零向量 $\vec{e_4} // l_4$，$\vec{e_4}$ 可分解为分别平行于 $l_1\ l_2\ l_3$ 的 3 个向量 $\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}$

之和，$\vec{e_4} = \vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$ 这样，当 $\vec{e_4}$ 乘上 λ 后，$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$、$\vec{e_3}$ 都需乘入。

∴由 $a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3} \Rightarrow \langle a_1\ a_2\ a_3\rangle$ 的三联比就完全确定了。

∴ $[l_1, l_2, l_3, l_4]$ 为射影标架，l_4 为单位点。

$l_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $l_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $l_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $l_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$B(O)$ 中的线对应空间中过 O 的一张平面，在上述仿射标架 $[O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}]$ 中方程：

$ax+by+cz=0$，可将三联比 $\langle a, b, c\rangle$ 称为此"线"的射影坐标。

∴取定射影标架 $[l_1\ l_2\ l_3\ l_4]$ 后，$B(O)$ 中点与线的集合到全部三联比集合

都分别是一一对应。 线：$\langle a, b, c\rangle$ 点：$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

No.

Date

2) 扩大平面上的射影坐标系

扩大平面 $\Leftrightarrow$ 中心直线把 $\Leftrightarrow [l_1\ l_2\ l_3\ l_4] \Leftrightarrow \vec{e_4}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3} \Leftrightarrow [O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}]$

为了让扩大平面上的射影坐标不依赖于 O，应有

$\forall l \in B(O)$，l 在 $[l_1\ l_2\ l_3\ l_4]$ 中的坐标和 $B(O')$ 中 $f(l)$ 在 $[l_1'\ l_2'\ l_3'\ l_4']$ 中坐标相同

($f: E^3 \to E^3$ 是一个空间仿射变换：$f(O)=O'$，$f(l_k)=l_k'$，$k=1,2,3,4$.)

证明：取定空间非零向量 $\vec{e_k} \parallel l_k$ 使 $\vec{e_4}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3} \Rightarrow$ 仿射标架 $[O;\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}]$

记 $\vec{e_k'}=f(\vec{e_k})$，则 $\vec{e_k'} \parallel l_k'$ 且有 $\vec{e_4'}=\vec{e_1'}+\vec{e_2'}+\vec{e_3'} \Rightarrow B(O')$ 仿射标架 $[O';\vec{e_1'}\vec{e_2'}\vec{e_3'}]$

设 $\vec{e} \parallel l$，则 $f(\vec{e}) \parallel f(l)$ 且 $\vec{e}$ 在 $[O;\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3}]$ 的坐标与 $f(\vec{e})$ 在 $[O';\vec{e_1'}\ \vec{e_2'}\ \vec{e_3'}]$ 的坐标相同，$\therefore l$ 在射影标架 $[l_1\ l_2\ l_3\ l_4]$ 中坐标和 $B(O')$ 中 $f(l)$ 在 $[l_1'\ l_2'\ l_3'\ l_4']$ 中坐标相同.

$\therefore A_1\left\langle\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\rangle\ A_2\left\langle\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\rangle\ A_3\left\langle\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\rangle\ A_4\left\langle\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\rangle \Leftrightarrow [l_1\ l_2\ l_3\ l_4]$.

同理扩大平面上的线也有坐标，与点的坐标关联定义.

① 点 $\left\langle\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\rangle$，线 $\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\rangle$，点线关联：$ax+by+cz=0$.

② $A_1\left\langle\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\rangle\ A_2\left\langle\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\rangle\ A_3\left\langle\begin{matrix}x_3\\y_3\\z_3\end{matrix}\right\rangle$，三点共线：$\det\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}=0$.

③ $L_1\langle a_1\ b_1\ c_1\rangle\ L_2\langle a_2\ b_2\ c_2\rangle\ L_3\langle a_3\ b_3\ c_3\rangle$ 三线共点：$\det\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=0$

④ $P\left\langle\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right\rangle\ Q\left\langle\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right\rangle$ 直线PQ上点的坐标一般形式 $\lambda\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$.

$\therefore$ PQ 决定的直线 $\langle a,b,c\rangle$ 满足 $(a,b,c)\cdot\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_2\\\lambda y_1+\mu y_2\\\lambda z_1+\mu z_2\end{pmatrix}=0$.

即 $\lambda(ax_1+by_1+cz_1)=0$

$\mu(ax_2+by_2+cz_2)=0$

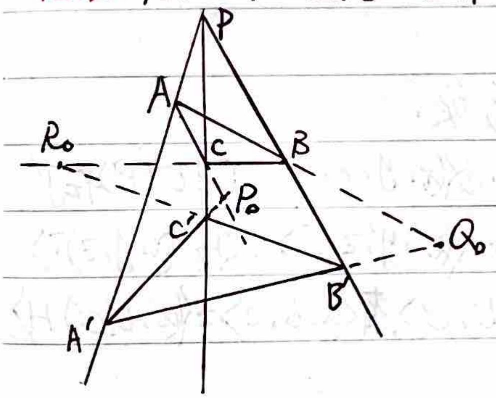
$\because \lambda,\mu$ 任意 $\therefore \begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 解得

$\langle a, b, c\rangle = k\left\langle \begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & z_2\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right\rangle$，k为任意非零倍数.

⑤ 同理：$L_1\langle a_1\, b_1\, c_1\rangle$ $L_2\langle a_2\, b_2\, c_2\rangle$ 过 $L_1\cap L_2$ 的线的坐标：$\lambda\langle a_1\, b_1\, c_1\rangle+\mu\langle a_2\, b_2\, c_2\rangle$

$L_1\, L_2$ 决定的点 $\left\langle \begin{matrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right\rangle$

定理：德扎格定理：如果两三角形对应顶点连线交于一点，则对应边交点共线.



证明：A.B.C.P 是一般位置点组，建立射影坐标系

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore AB\left\langle \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right\rangle = \langle 0, 0, 1\rangle$

$BC\langle 1, 0, 0\rangle$ $AC\langle 0, 1, 0\rangle$

$\because$ A' 与 A、P 共线，可设 A' 的坐标为 $\begin{pmatrix}x\\1\\1\end{pmatrix}$ 同理 $B'\begin{pmatrix}1\\y\\1\end{pmatrix}$ $C'\begin{pmatrix}1\\1\\z\end{pmatrix}$

$A'B'\left\langle \begin{vmatrix}y & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & x\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & x\\ y & 1\end{vmatrix}\right\rangle = \langle 1-y, 1-x, xy-1\rangle$

$B'C'\langle yz-1, 1-z, 1-y\rangle$ $C'A'\langle 1-z, xy-1, 1-x\rangle$.

$\therefore P_0\begin{pmatrix}1-x\\0\\z-1\end{pmatrix}$ $Q_0\begin{pmatrix}x-1\\1-y\\0\end{pmatrix}$ $R_0\begin{pmatrix}0\\y-1\\1-z\end{pmatrix}$ $\because \begin{vmatrix}1-x & x-1 & 0\\ 0 & 1-y & y-1\\ z-1 & 0 & 1-z\end{vmatrix} = 0$ $\therefore P_0\, Q_0\, R_0$ 共线

3. 射影坐标变换.

① 点的射影坐标变换公式：设 J 和 J' 是同一射影平面上的两个射影坐标系 $\langle (x, y, z)^T\rangle$ 和 $\langle (x', y', z')^T\rangle$ 是 P 在 J、J' 中的射影坐标，则存在可逆 H，$\langle (x, y, z)^T\rangle = \langle H(x', y', z')^T\rangle$，H 间可差一非0常数倍.（先标准化再求变换矩阵）

No.

Date

② 线的射影坐标变换公式：设H为J到J′的过渡矩阵，线l在J中的坐标为$\langle a,b,c\rangle$ 则当在J′中坐标为$\langle (x',y',z')^T\rangle$的点在l上的充要条件：$(a,b,c)H(x',y',z')^T=0$

可见$\langle (a,b,c)H\rangle$就是l在J′中的坐标

$\therefore \langle a',b',c'\rangle=\langle (a,b,c)H\rangle$.

4. 射影映射 ⇒ 射影变换.

从一个射影平面到另一个射影平面的一个一一对应，把共线点变为共线点.

{ 保持线结构
保持点线关联.

一个射影平面到自身的射影映射 → 射影变换.

设H为J到J′的过渡矩阵：若P在J中的坐标为$\langle (x,y,z)^T\rangle$，则σ(P)在J′中的坐标也是$\langle (x,y,z)^T\rangle$ ∴σ(P)在J中的坐标 $\langle (x',y',z')^T\rangle=\langle H(x,y,z)^T\rangle$

对线l的射影变换：J：$\langle a,b,c\rangle$，σ(l)：J：$\langle a',b',c'\rangle$，有$\langle a,b,c\rangle=\langle (a',b',c')H\rangle$

性质：① G是J中的σ射影变换，则G^{-1}是J中σ^{-1}的变换矩阵.

② G_1、G_2是σ_1 σ_2在J中的变换矩阵，则G_2G_1是$\sigma_2\circ\sigma_1$在J中的……

③ G是J中的σ射影变换，H是J到J′的过渡矩阵，则σ在J′中的变换矩阵为$H^{-1}GH$.

5. 交比

普通几何中的交比：

$$\begin{cases}\vec{\alpha_3}=s_1\vec{\alpha_1}+t_1\vec{\alpha_2}\\ \vec{\alpha_4}=s_2\vec{\alpha_1}+t_2\vec{\alpha_2}\end{cases}$$

交比：$\frac{s_2t_1}{s_1t_2}=\frac{s_2}{t_2}\Big/\frac{s_1}{t_1}=(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2};\vec{\alpha_3},\vec{\alpha_4})=(k_1\vec{\alpha_1},k_2\vec{\alpha_2};k_3\vec{\alpha_3},k_4\vec{\alpha_4})$

No.

Date

① 线的交比：$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}; \vec{\alpha_3}, \vec{\alpha_4})$ $\vec{\alpha_i} \parallel l_i$.

② 点的交比：$(A_1, A_2; A_3, A_4) = \dfrac{(A_1, A_2, A_3)}{(A_1, A_2, A_4)}$ $\Rightarrow A_1A_3 = \lambda_1 A_3A_2$ $\Rightarrow A_1A_4 = \lambda_2 A_4A_2$.

③ 面的交比：共线平面

$\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4$ 与 π（过此线）相交所得交线的交比

$(\pi_1, \pi_2; \pi_3, \pi_4) = (l_1, l_2; l_3, l_4)$. 且与 π 的选择无关.

扩大平面上的交比：

$P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ 共线，则 $P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2$ $P_4 = \lambda' P_1 + \mu' P_2$. 交比 $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \dfrac{\lambda' \mu}{\mu' \lambda}$.

$l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ 共点，则 $l_3 = \lambda l_1 + \mu l_2$，$l_4 = \lambda' l_1 + \mu' l_2$ 交比 $(l_1, l_2; l_3, l_4) = \dfrac{\lambda' \mu}{\mu' \lambda}$.

1) 交比定义与齐次坐标选取无关.

若取 P_1, P_2, P_3, P_4 的齐次坐标分别为 $\rho_1 P_1, \rho_2 P_2, \rho_3 P_3, \rho_4 P_4$. 则

$\rho_3 P_3 = \lambda(\rho_1 P_1) + \mu(\rho_2 P_2)$，$\rho_4 P_4 = \lambda'(\rho_1 P_1) + \mu'(\rho_2 P_2)$

$\therefore P_3 = \dfrac{\lambda \rho_1}{\rho_3} P_1 + \dfrac{\mu \rho_2}{\rho_3} P_2$

$P_4 = \dfrac{\lambda' \rho_1}{\rho_4} P_1 + \dfrac{\mu' \rho_2}{\rho_4} P_2$

$\therefore (P_1, P_2; P_3, P_4) = \dfrac{\frac{\mu' \rho_2}{\rho_4}}{\frac{\lambda' \rho_1}{\rho_4}} \Big/ \dfrac{\frac{\mu \rho_2}{\rho_3}}{\frac{\lambda \rho_1}{\rho_3}} = \dfrac{\lambda' \mu}{\mu' \lambda}$.

2). 直线 l_1, l_2, l_3, l_4 共点，直线 l 与它们分别交于四点 P_1, P_2, P_3, P_4. 有

$(l_1, l_2; l_3, l_4) = (P_1, P_2; P_3, P_4)$.

设 l 的坐标为 u，l_i 的坐标为 $u^{(i)}$. 则 P_i 的坐标为 $u \times u^{(i)}$.

因 l_1, l_2, l_3 共点、l_1, l_2, l_4 共点，可设

$\because u^{(3)} = \lambda u^{(1)} + \mu u^{(2)}$ $\therefore u^{(4)} = \lambda' u^{(1)} + \mu' u^{(2)}$ $\therefore (l_1, l_2; l_3, l_4) = \dfrac{\lambda' \mu}{\mu' \lambda}$

又 $\because u \times u^{(3)} = \lambda u \times u^{(1)} + \mu u \times u^{(2)}$ $\therefore P_3 = \lambda P_1 + \mu P_2$

$u \times u^{(4)} = \lambda' u \times u^{(1)} + \mu' u \times u^{(2)}$ $P_4 = \lambda' P_1 + \mu' P_2$

$\therefore (P_1, P_2; P_3, P_4) = (l_1, l_2; l_3, l_4) = \dfrac{\lambda'}{\mu'} \Big/ \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\lambda' \mu}{\mu' \lambda}$.

No.

Date

六. 空间解析几何

1. 引子：内积空间与正交变换

线性空间中的线性运算不能描述向量的度量性质，引入内积后可对向量的长度、夹角进行度量，进而将线性空间变为内积空间。

在实空间 $V(R)$ 上定义一个二元运算，使 V 中元素 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 与一实数对应，记为 $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

若 $\forall \vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，$\lambda\in R$ 满足

$$\begin{cases}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(\vec{\beta},\vec{\alpha})\\(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma})=(\vec{\alpha},\vec{\gamma})+(\vec{\beta},\vec{\gamma})\\(\lambda\vec{\alpha},\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha},\vec{\beta}).\\(\vec{\alpha},\vec{\alpha})\geq 0 \text{ 等号成立当且仅当 } \vec{\alpha}=\vec{0}.\end{cases}$$

则 $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ 为 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的内积，定义内积的 $V(R)$ 称实内积空间，$n<\infty \Rightarrow$ 欧氏空间

$$\begin{cases}\text{长度：}|\vec{\alpha}|=\sqrt{(\vec{\alpha},\vec{\alpha})}\\\text{夹角：}\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\arccos\dfrac{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}.\end{cases}$$

① 欧氏空间的单位正交基

$B=\{\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n\}$ 为 $V_n(R)$ 的基，若 $(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ 则 B 为单位正交基

可用施密特正交化的方法将 $V_n(R)$ 中任一组基化为单位正交基。

设 $B=\{\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n\}$ 是 $V(R)$ 一组基。

1) 令 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2+\lambda_{12}\vec{\beta}_1$，$(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_1)=(\vec{\alpha}_2+\lambda_{12}\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)$

$=(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)+\lambda_{12}(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)\stackrel{\triangle}{=}0$

$\therefore \lambda_{12}=-\dfrac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}$

2) 如果已求出两两正交的非零向量 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2\cdots\vec{\beta}_{m-1}$，令

$\vec{\beta}_m=\vec{\alpha}_m+\lambda_{m-1,m}\vec{\beta}_{m-1}+\cdots+\lambda_{2m}\vec{\beta}_2+\lambda_{1m}\vec{\beta}_1$

使 $\vec{\beta}_m$ 与 $\vec{\beta}_k$ $(k=1,2,\cdots,m-1)$ 正交：$(\vec{\beta}_m,\vec{\beta}_k)=(\vec{\alpha}_m,\vec{\beta}_k)+\lambda_{km}(\vec{\beta}_k,\vec{\beta}_k)=0$

$\therefore \lambda_{km}=-\dfrac{(\vec{\alpha}_m,\vec{\beta}_k)}{(\vec{\beta}_k,\vec{\beta}_k)}$，

3) 由数学归纳法，由基 B 可构造出单位正交基。

No.

Date · ·

$\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1$

$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-\frac{(\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\cdot\vec{\beta}_1$

$\cdots$

$\vec{\beta}_n=\vec{\alpha}_n-\frac{(\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_{n-1})}{(\vec{\beta}_{n-1},\vec{\beta}_{n-1})}\cdot\vec{\beta}_{n-1}-\cdots-\frac{(\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_2)}{(\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_2)}\cdot\vec{\beta}_2-\frac{(\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_1)}{(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_1)}\cdot\vec{\beta}_1$

单位化之，$\vec{\varepsilon}_m=\vec{\beta}_m/|\vec{\beta}_m|$ $m=1,\cdots,n.$

$\therefore$ 得到 $V(R)$ 的单位正交基 $B^*=\{\vec{\varepsilon}_1\ \vec{\varepsilon}_2\cdots\vec{\varepsilon}_n\}$

② 正交子空间

$\forall\vec{\gamma}\in W,\ (\vec{\alpha},\vec{\gamma})=0\ \Rightarrow\vec{\alpha}\perp W$

$\forall\vec{\alpha}\in W_1,\ \forall\vec{\beta}\in W_2.\ (\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\ \Rightarrow W_1\perp W_2.\Rightarrow$ 若 $W_1+W_2=V,\ W_2=W_1^{\perp},$

$\dim W_1+\dim W_2=\dim W_1+\dim W_1^{\perp}=\dim V.$

③ 正交变换、正交矩阵

若 $\sigma\in L(V,V)$ 使 $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V,\ (\sigma(\vec{\alpha}),\sigma(\vec{\beta}))=(\vec{\alpha},\vec{\beta}).\Leftrightarrow|\sigma(\vec{\alpha})|=|\vec{\alpha}|.$

$\Rightarrow\langle\sigma(\vec{\alpha}),\sigma(\vec{\beta})\rangle=\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle.$ σ 为正交变换. 其关于 V 的单位正交基的矩阵是正交矩阵：$\sigma(\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n)A.$

1) 正交矩阵 $\Rightarrow$ 其列向量组是一组单位正交基.

证明：设 $\{\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n\}$ 是 V 的一组单位正交基，A(正交变换)是 $\{\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n\}$ 下的 σ.

$\therefore(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j)=(\sigma(\vec{\varepsilon}_i),\sigma(\vec{\varepsilon}_j))=(\sum_{k=1}^n a_{ki}\vec{\varepsilon}_k,\sum_{l=1}^n a_{lj}\vec{\varepsilon}_l)$

$=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=\vec{\alpha}_j^T\vec{\alpha}_i$ $\quad(A=(a_{ij})_{n\times n}=(\vec{\alpha}_1\cdots\vec{\alpha}_n)).$

$=(\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j)=\begin{cases}1 & j=i\\0 & j\neq i\end{cases}$ $\quad i,j=1,2\cdots n.$

2). A 列向量组是一组单位正交基 $\Rightarrow A$ 是正交矩阵.

证明：由 $\sigma(\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{\varepsilon}_1\cdots\vec{\varepsilon}_n)A$. 和 $(\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1 & j=i\\0 & j\neq i\end{cases}$ 可见

$\{\sigma(\vec{\varepsilon}_1)\cdots\sigma(\vec{\varepsilon}_n)\}$ 也是 V 的一组单位正交基.

$\therefore\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V,\ \vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n a_i\vec{\varepsilon}_i,\ \vec{\beta}=\sum_{j=1}^n b_j\vec{\varepsilon}_j$

No.

Date

$$(\sigma(\vec{\alpha}),\sigma(\vec{\beta}))=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\sigma(\vec{\varepsilon_i}),\sum_{j=1}^{n}b_j\sigma(\vec{\varepsilon_j})\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\vec{\varepsilon_i},\sum_{j=1}^{n}b_j\vec{\varepsilon_j}\right)=(\vec{\alpha},\vec{\beta}).$$

$\therefore\sigma$是正交变换，A是正交矩阵.

3). A的列向量组$\{\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_n}\}$是$R^n$的单位正交基$\Leftrightarrow A^TA=E$.

证明：
$$A^TA=\begin{pmatrix}\vec{\alpha_1}^T\\ \vec{\alpha_2}^T\\ \vdots\\ \vec{\alpha_n}^T\end{pmatrix}(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}\cdots\vec{\alpha_n})=\begin{pmatrix}\vec{\alpha_1}^T\vec{\alpha_1} & \vec{\alpha_1}^T\vec{\alpha_2} & \cdots & \vec{\alpha_1}^T\vec{\alpha_n}\\ \vec{\alpha_2}^T\vec{\alpha_1} & & & \vdots\\ \vdots & & & \\ \vec{\alpha_n}^T\vec{\alpha_1} & & \cdots & \vec{\alpha_n}^T\vec{\alpha_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_1}) & (\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}) & \cdots & (\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_n})\\ (\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_1}) & & & \vdots\\ \vdots & & & \\ (\vec{\alpha_n},\vec{\alpha_1}) & & \cdots & (\vec{\alpha_n},\vec{\alpha_n})\end{pmatrix}=E_{n\times n}.$$

综上，A是正交矩阵$\Leftrightarrow$A的列(行)向量组是单位正交基$\Leftrightarrow A^TA=E\Leftrightarrow A^{-1}=A^T$

$\Rightarrow |A|=1$ or -1

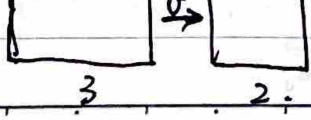
$\Rightarrow\langle A\vec{\alpha},A\vec{\beta}\rangle=\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle.$

$\Rightarrow$正交变换引起的点变换是一种仿射变换.

2. 线性型与空间解析几何.

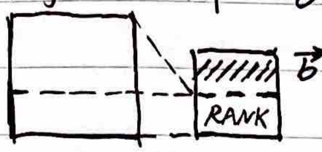
① 两平面间的位置关系.

两平面的方程联立$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\end{cases}$



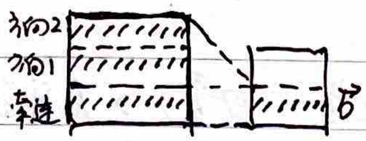
3 　 2.

1) 两平面平行 → 无解. → $\vec{b}$ 在 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 外



$r(A)=1$, $r(A,\vec{b})=2$.

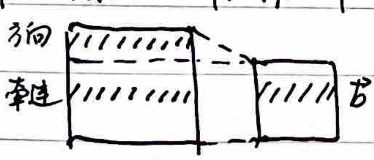
2) 两平面重合 → 有解（两维解空间）→ $\vec{b}$ 在 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 内.



$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x} = \vec{x}_0 + k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2$.

$r(A)=1$, $r(A,\vec{b})=1$

3) 两平面相交 → 有一维解（直线）→ $\vec{b}$ 在 $\mathrm{Im}\,\sigma$ 内.



$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}$.

$r(A)=2$, $r(A,\vec{b})=2$.

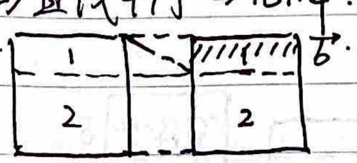
② 平面与直线的位置关系

直线 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$ $r(A_0) = r(A_0,\vec{b}) = 2$.

平面：$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

联立：$A\vec{X} = \vec{b}$, $A \in M_3(F)$.

1) 平面与直线平行 → 无解.

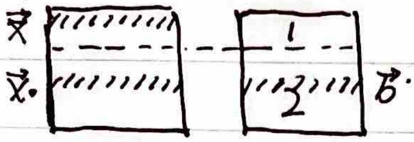


直线 $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}$, $\vec{x}$ 与平面的法向量 (a_{31}, a_{32}, a_{33}) 垂直.

直线到 O 的距离 $\left|\vec{x}_0 - \frac{(\vec{x}_0,\vec{x})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}}\vec{x}\right| \neq$ 平面到 O 的距离 $\frac{b_3}{\sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2}}$.

$r(A)=2$, $r(A,\vec{b})=3$.

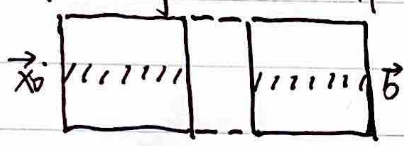
2) 直线在平面上 → 解就是原直线(一维) → $\vec{b}$ 在 Im A 内.



$$d=\left|\vec{x_0}-\frac{(\vec{x_0},\vec{x})}{|\vec{x}|}\vec{x}\right|=\frac{b_2}{\sqrt{a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2}}.$$

$r(A)=r(A,\vec{b})=2.$

3). 直线与平面交于一点 → 解是0维的(就是一个向量) → A可逆, σ双射.



$r(A)=r(A,\vec{b})=3.$

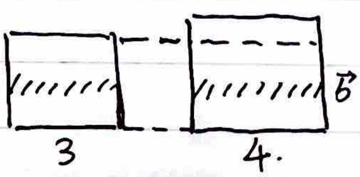
③ 两直线间位置关系.

$$l_1\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\end{cases}\quad r(A_1)=r(A_1,\vec{b_1})=2$$

$$l_2\begin{cases}a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\\a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3=b_4\end{cases}\quad r(A_2)=r(A_2,\vec{b_2})=2$$

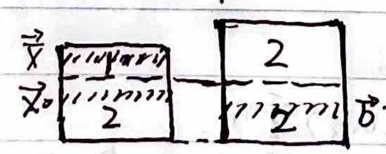
联立: $A_{4\times3}\vec{x}=\vec{b}$.

1) 相交 → 解为一个点(0维) → A列满秩.

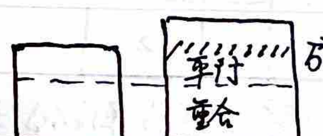


$r(A)=r(A,\vec{b})=3.$

2) 重合 → 二维解 A一样 平行 → 零维解.

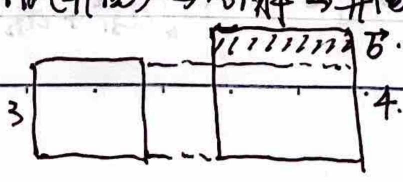


$r(A)=r(A,\vec{b})=2.$



$r(A)=2,\ r(A,\vec{b})=3.$

3). 相错(异面) → 无解 ↳ 异面的同位形情况是相交.



$r(A)=3,\ r(A,\vec{b})=4.\quad \vec{b}\notin R(A).$

No.

Date

3. 二次型与空间解析几何.

对$V_n(F)$上的双线性函数 $f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$，设$B=\{\vec{e_1}\cdots\vec{e_n}\}$是组基，$\vec{\alpha},\vec{\beta}$在基下表示为 $\vec{X}=(x_1\cdots x_n)^T$，$\vec{Y}=(y_1\cdots y_n)^T$.

$$\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i},\quad \vec{\beta}=\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}.$$

$$\therefore f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=f\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i},\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j f(\vec{e_i},\vec{e_j})$$

令$a_{ij}=f(\vec{e_i},\vec{e_j})\ (i,j=1,\cdots,n)$. 则

$$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i y_j=\sum_{i=1}^n x_i(a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\cdots+a_{in}y_n)$$

$$=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&&&\vdots\\\vdots&&&\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\vec{X}^TA\vec{Y}.$$

$A=(a_{ij})_{n\times n}=(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{n\times n}$为双线性函数$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$在基$B$下的度量矩阵.

定理：$V(F)$中双线性函数$f(\vec{\alpha},\vec{\beta})$在基$B_1=\{\vec{\varepsilon_1}\,\vec{\varepsilon_2}\cdots\vec{\varepsilon_n}\}$和$B_2=\{\vec{\eta_1}\,\vec{\eta_2}\cdots\vec{\eta_n}\}$下度量矩阵分别为$A$、$B$、若$(\vec{\eta_1}\cdots\vec{\eta_n})=(\vec{\varepsilon_1}\cdots\vec{\varepsilon_n})C$. 则$B=C^TAC$.

证明：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij}=f(\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j})$；$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$b_{ij}=f(\vec{\eta_i},\vec{\eta_j})$，

$C=(c_{ij})_{n\times n}$，$C^T=(c_{ji})_{n\times n}$.

$$\therefore b_{ij}=f(\vec{\eta_i},\vec{\eta_j})=f\left(\sum_{k=1}^n c_{ki}\vec{\varepsilon_k},\sum_{m=1}^n c_{mj}\vec{\varepsilon_m}\right)=\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n c_{ki}c_{mj}f(\vec{\varepsilon_k},\vec{\varepsilon_m}).$$

$$=\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^n c_{ki}c_{mj}a_{km}=\sum_{m=1}^n\left(\sum_{k=1}^n c_{ki}a_{km}\right)c_{mj}$$

$$=\sum_{m=1}^n(C^TA)_{im}c_{mj}=(C^TAC)_{ij}\qquad i,j=1,\cdots,n.$$

$\therefore B=C^TAC.$ 称A相合于B，$A\simeq B$.

1. 相合矩阵等价类.

自反性：$\forall A\in M_n(F)$，$A\simeq A$：$A=E^TAE$

对称性：$\forall A,B\in M_n(F)$，若$A\simeq B$则$B\simeq A$：$A=C^TBC$，$B=(C^{-1})^TA\cdot C^{-1}$.

传递性：$A=P_1^TBP_1$　$B=P_2^TCP_2$.　$\therefore A=P_1^TP_2^TCP_2P_1=(P_2P_1)^TC(P_2P_1)$.

相合标准形 → 相合规范形

2. 相合实对称矩阵等价类中最简代表元（对角阵 → 相合规范型）的求法.

① 二次型 — 对称的双线性函数.

$\begin{cases} f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=f(\vec{\beta},\vec{\alpha}) \Rightarrow \text{对称双线性函数} \\ f(\vec{\alpha},\vec{\beta})=-f(\vec{\beta},\vec{\alpha}) \Rightarrow \text{反对称双线性函数} \end{cases}$

eg. 欧氏空间上的内积 $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

eg. n阶行列式 $D(\vec{\alpha}_1 \cdots \vec{\alpha}_n)$ 反对称n重线性函数

$$f(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \vec{X}^T A\vec{X}$$

是对称双线性函数. A是实对称矩阵. 称之为n元二次型.

② 对于对称双线性函数（二次型），因不同基下的度量矩阵相合:

$$f(\vec{\alpha},\vec{\alpha}) = \vec{X}^T A\vec{X} = (C\vec{Y})^T A(C\vec{Y}). \quad C\text{为基变换矩阵}.$$

$$= \vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}.$$

∴ 对于一个二次型，我们希望能像相似标准型那样，找到一组基使 $f(\vec{\alpha},\vec{\alpha})$ 在此基下度量矩阵最简单:

若 $C^TAC = diag(d_1, d_2 \cdots d_n) \longrightarrow$ A的相合标准型形.

③ 事实上，任一实对称矩阵（二次型），都存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = diag(\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

证明: 1). 实对称矩阵可对角化第一步：λ_i 都是实数.

需证 $\bar{\lambda}=\lambda$，根据 $A\vec{X}=\lambda\vec{X}$，$(\bar{A})^T=A$ 得.

$$\lambda(\bar{\vec{X}})^T\vec{X} = (\bar{\vec{X}})^T(\lambda\vec{X}) = (\bar{\vec{X}})^TA\vec{X} = (\bar{\vec{X}})^T(\bar{A})^T\vec{X}$$

$$= (\bar{A}\bar{\vec{X}})^T\vec{X} = (\bar{\lambda}\bar{\vec{X}})^T\vec{X} = \bar{\lambda}(\bar{\vec{X}})^T\vec{X}$$

∴ $\bar{\lambda}=\lambda$.

2). 若A是一个n阶实对称矩阵 则存在n阶正交阵Q，使 $Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$

- $n=1$时，显然成立
- $n-1$时假设成立.
- 对n阶的实对称矩阵，设λ_1是A的一个特征值，$A\vec{X}_1=\lambda_1\vec{X}_1$

No.

Date . .

不妨设 $\vec{x}_1$ 是长度为1的特征向量，将 $\vec{x}_1$ 扩充为单位正交基 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n\}$

$\because A\vec{x}_j$ 可由此基线性表示 $(j=2,3\cdots n)$

$$\therefore A(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n) = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

记 $P=(\vec{x}_1\ \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_n)$ (~~单位~~正交阵)，将上式写成

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{b} \\ \vec{0} & B \end{pmatrix}$$

$\because P^{-1}=P^T$，$(P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^{-1})^T = P^{-1}AP \Rightarrow$ 实对称矩阵 $\therefore \vec{b}=\vec{0}$ 且 B 为 $n-1$ 阶实对称矩阵，根据归纳假设 $\exists$ $n-1$ 阶正交阵 Q_1 使

$Q_1^{-1}BQ_1 = diag(\lambda_2 \cdots \lambda_n)$.

取 $S=\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & Q_1 \end{pmatrix}$ （也是正交阵）.

$$\therefore S^{-1}(P^{-1}AP)S = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & Q_1^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vec{0} \\ \vec{0} & Q_1^{-1}BQ_1 \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \cdots \lambda_n).$$

$\therefore$ 令 $Q=PS$ 代入上式得 $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$.

定理：实对称矩阵（二次型）属于不同特征值的特征向量是正交的.

证明：设 $\lambda_1\ \lambda_2$ 是 A 的两不同（实）特征值，由 $A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$，$A\vec{x}_2=\lambda_2\vec{x}_2$ 得

$$\lambda_1(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\lambda_1\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (A\vec{x}_1)^T\vec{x}_2 = \vec{x}_1^TA^T\vec{x}_2 = \vec{x}_1^TA\vec{x}_2$$

$$= (\vec{x}_1, A\vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2).$$

$\because \lambda_1 \neq \lambda_2$ $\therefore (\vec{x}_1,\vec{x}_2)=0$.

④ 将二次型化为相合标准形的几种方法.

1) 由上定理可看到，对任一二次型，存在正交阵 Q，$Q^TAQ = diag(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$.

$\because Q^T=Q^{-1}$ $\therefore A$ 的相合标准形也是其相似标准形.

且特征子空间 $V_{\lambda_1} \cdots V_{\lambda_m}$ 两两正交. $\therefore$ 找出各子空间的基再将其施密特单位正交化后排成列向量组即得 Q.（列向量组顺序与 λ_i 顺序一致）. 相似形法.

No.

Date

2). 配方法.

若二次型中有平方项，则一元一元地配，直至将交叉项全配进完全平方项中.
　　得到一主对角元为1的上三角基变换矩阵.
若二次型中只有交叉项，先作一尽量简单的能产生平方项的基变换，再按上法
　　配掉所有交叉项成为完全平方式.

3). 初等变换法.

可用数学归纳法证明：对任一实对称阵A，存在初等阵（倍加、倍乘、对换）
$P_1 P_2 \cdots P_k$ 使 $P_k^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_k = \mathrm{diag}(d_1\ d_2 \cdots d_n)$
变换矩阵 $C = P_1 P_2 \cdots P_k = E \cdot P_1 P_2 \cdots P_k$.
∴ $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 中对A作同类型的初等行、列变换使之化为对角阵，相应地，
对E作同样的初等列变换，E就化为C.

⑤ 从初等变换法的思路可看出，相合标准形不唯一，但都可化为

$C^T A C = \Lambda = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}, \underbrace{-1,\cdots,-1}, 0,\cdots,0)$ 的形式. ⇒ 相合规范形

正惯性指数 + 负惯性指数
↓
RANK.

∴ 两n阶实对称矩阵A、B相合的充要条件是其正、负惯性指数分别相等.

3. 二次曲线的标准方程及分类 & 二次曲面的分类.

通过将二元二次型（二次曲线）化为相合标准形（规范形）可判断
二次曲线的类型.
通过将 $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的二次部分（三元二次型）通过正交变换化为标准形
用各特征值判断其类型.
椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. 双叶双曲面：$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$　双曲抛物面（马鞍面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$.

No.

Date

4 正定二次型与正定矩阵、其它有定二次型.

$\forall \vec{x} \neq \vec{0}$ ($\vec{x} \in R^n$), 恒有 $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$ 则 $f(\vec{x}, \vec{x}) = f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \vec{x}^T A \vec{x}$ 是正定次型.

A为正定矩阵.

① n元实二次型(标准形) $f = d_1 x_1^2 + \cdots + d_n x_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow$ $d_i > 0$ ($i = 1, \cdots, n$).

充分性: obviously.

必要性: 反证: 假设 $\exists d_i \leq 0$. 取 $x_i = 1$, $x_j = 0$ ($j \neq i$)

便有 $f(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = d_i \leq 0$. 矛盾.

② 若 $f = \vec{x}^T A \vec{x}$ 正定, 则 $f = \vec{y}^T (C^T A C) \vec{y}$ 正定, $\vec{x} = C\vec{y}$, C可逆.

③ A正定 $\Leftrightarrow$ A的正惯性指数为n, 即 $A \simeq E$.

④ A正定 $\Leftrightarrow$ $\exists$ P可逆, $A = P^T P$.

$\because A \simeq E$. $\therefore \exists$ 可逆的C使 $C^T A C = E$. $\therefore A = (C^T)^{-1} C^{-1}$ 令 $P = C^{-1}$ 即得.

⑤ A正定 $\Leftrightarrow$ A的n个特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 都大于零.

设λ是A的任一特征值. $\therefore \exists$ 实向量 $\vec{x} \neq \vec{0}$, $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ $\because A = P^T P$.

$\therefore (P^T P)\vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow (\vec{x}^T P^T)(P\vec{x}) = \lambda \vec{x}^T \vec{x} \Rightarrow (P\vec{x}, P\vec{x}) = \lambda (\vec{x}, \vec{x})$.

$\because (P\vec{x}, P\vec{x})$、$(\vec{x}, \vec{x}) > 0$. $\therefore \lambda > 0$

⑥ A正定 $\Leftrightarrow$ A^{-1} 正定.

⑦ A正定 $\Leftrightarrow$ A的n个顺序主子式 > 0. 即 $\det A_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$.

$k = 1, 2, \cdots, n$.

定理: 若 $\vec{x}^T A \vec{x}$ 正定, 则A的主对角元 $a_{ii} > 0$; A的行列式 > 0.

证明: 1) $\because \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ 正定.

$\therefore$ 取 $\vec{x}_i = (0, \cdots 0, 1, 0 \cdots 0)$ 第i个分量为1, 必有 $\vec{x}_i^T A \vec{x}_i = a_{ii} x_i^2 = a_{ii} > 0$.

2) $\because$ A正定 $\therefore \exists$ 可逆P使 $A = P^T P$ $\therefore |A| = |P^T||P| = |P|^2 > 0$.

$\vec{x}^T A \vec{x} < 0$: 负定: 负惯性指数 $= n$; $-A$ 正定; 奇数阶顺主 < 0、偶数阶顺主 > 0.

$\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$: 半正定: 正惯性指数 $= r(A)$; A的各阶主子式 ≥ 0.

$\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$: 半负定: 负惯性指数 $= r(A)$ ...

七. 微分几何

R^3中曲线、曲面在一点附近的局部性质和一些特征量.

1. 向量函数.

$\vec r(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

①导数 $\dot{\vec r}(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)}{\Delta t}=(\dot x(t_0),\dot y(t_0),\dot z(t_0))$.

若$\|\dot{\vec r}(t_0)\|\neq 0$，则$t_0$是曲线C的正则点，否则为奇点，

当C上都是正则点时C为正则曲线，当$\dot{\vec r}(t)$在$[a,b]$上$\neq 0$、连续时，

C为光滑曲线.

1) $\frac{d}{dt}(\vec r_1\cdot\vec r_2)=\frac{d\vec r_1}{dt}\cdot\vec r_2+\vec r_1\cdot\frac{d\vec r_2}{dt}$.

2) $\frac{d}{dt}(\vec r_1\times\vec r_2)=\frac{d\vec r_1}{dt}\times\vec r_2+\vec r_1\times\frac{d\vec r_2}{dt}$.

3) $\frac{d}{dt}(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)=(\frac{d\vec r_1}{dt},\vec r_2,\vec r_3)+(\vec r_1,\frac{d\vec r_2}{dt},\vec r_3)+(\vec r_1,\vec r_2,\frac{d\vec r_3}{dt})=\frac{d}{dt}[\vec r_1\cdot(\vec r_2\times\vec r_3)]$

4) $\vec r^{(n)}(t)=(x^{(n)}(t),y^{(n)}(t),z^{(n)}(t))$.

5) $\vec r(t+\Delta t)=\vec r(t)+\dot{\vec r}(t)\Delta t+\cdots+\frac{1}{n!}\vec r^{(n)}(t)(\Delta t)^n+\vec\varepsilon(\Delta t)^n$.

②积分. $\int\vec r(t)\,dt=\vec R(t)+\vec C$.

$\int_a^b\vec r(t)\,dt=\vec R(b)-\vec R(a)$.

2. 曲线的一般参数和弧长参数描述的弗雷耐标架（自然坐标系）.

定义 $\dot{\vec r}=\frac{d\vec r}{dt}$, $\vec r'=\frac{d\vec r}{ds}$.

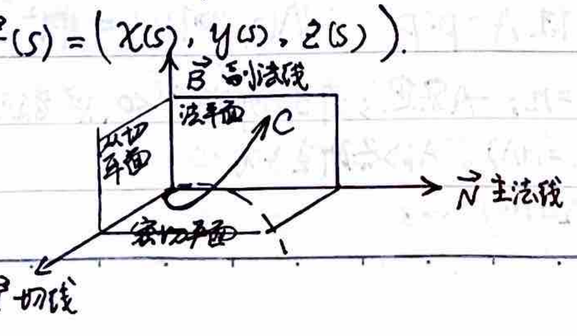
弧微分 $ds=\|\dot{\vec r}(t)\|dt=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt$.

若 $\dot{\vec r}\neq\vec 0$（正则），则 $\frac{ds}{dt}=\|\dot{\vec r}\|=\|\frac{d\vec r}{dt}\|>0$. ∴ $s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt$

$=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\,d\theta$ 的反函数 $t=t(s)$存在.

∴必有以弧长s为参数的曲线C的方程.

$\vec r=\vec r(s)=(x(s),y(s),z(s))$.



① 切线与法平面

设 $\vec{r}=\vec{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))\quad a\le s\le b.$

$\forall s_0\in[a,b]$，有切向量 $\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}\quad\left(\|\vec{T}\|=\frac{|d\vec{r}|}{ds}=1\right)$

$$\begin{cases}\text{切线方程 } \vec{\rho}=\vec{r}(s_0)+\lambda\vec{T}=\vec{r}(s_0)+\lambda\vec{r}'(s_0)\\ \text{法平面方程: } (\vec{\rho}-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{r}'(s_0)=0.\end{cases}$$

其中，$\vec{\rho}=\vec{\rho}(x,y,z)$ 为向径.

以 t 为参数:

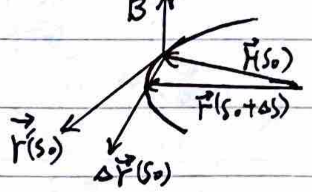
切向量 $\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{\vec{r}'(t)}{\|\frac{d\vec{r}}{dt}\|}=\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}.$

此时 $\vec{r}(t_0)$ 处的

$$\begin{cases}\text{切线方程 } \vec{\rho}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}'(t_0)\\ \text{法平面方程: } \vec{r}'(t_0)(\vec{\rho}-\vec{r}(t_0))=0.\end{cases}$$

② 副法线与密切平面

密切平面即过 C 上点 $\vec{r}(s_0)$ 的切线及其邻近点 $\vec{r}(s_0+\Delta s)$ 作的平面 π' 当 $\Delta s\to0$ 的极限位置 π.



← π' 的法向量显然与 $\vec{r}'(s_0)\times(\vec{r}(s_0+\Delta s)-\vec{r}(s_0))$ 平行.

而 $\vec{r}'(s_0)\times(\vec{r}(s_0+\Delta s)-\vec{r}(s_0))=\vec{r}'(s_0)\times\left(\vec{r}'(s_0)\Delta s+\frac{1}{2!}(\vec{r}''(s_0)+\vec{\varepsilon})(\Delta s)^2\right)$

$=\frac{1}{2}\vec{r}'(s_0)\times(\vec{r}''(s_0)+\vec{\varepsilon})(\Delta s)^2$

当 $\lim_{\Delta s\to0}\vec{\varepsilon}=\vec{0}$ 时，$\vec{B}\parallel\vec{r}'(s_0)\times\vec{r}''(s_0)$.

又 $\because\ \vec{r}'\cdot\vec{r}''=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\cdot\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right)=\frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)+\cdots+\frac{dz}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right)$

$=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=0.$

$\therefore\ \vec{r}'\perp\vec{r}''$

No.

Date

∵ $\vec{B}$ 需是单位向量 ∴ $\vec{B}=\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\|\vec{r}'\times\vec{r}''\|}=\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}$ $(\|\vec{r}'\|=1)$.

∴ $\begin{cases}\text{副法线方程}\quad \vec{\rho}=\vec{r}(s_0)+\lambda\vec{B}=\vec{r}(s_0)+\lambda(\vec{r}'\times\vec{r}''). \\ \text{密切平面方程}\quad (\vec{\rho}-\vec{r}(s_0))\vec{B}=0 \text{ 或 } (\vec{r}',\vec{r}'',\vec{\rho}-\vec{r})=0.\end{cases}$

若是一般参数 t. 则 $\vec{B}=\dfrac{\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)}{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\times\ddot{\vec{r}}(t_0)\|}$.

$\begin{cases}\text{副法线方程：}\ \vec{\rho}=\vec{r}(t)+\lambda\vec{B} \\ \text{密切平面方程：}\ (\vec{\rho}-\vec{r}(t))\vec{B}=0\end{cases}$

③ 主法线与从切平面.

已知 $\vec{T}=\vec{r}'$，$\vec{B}=\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}$ 且 $\vec{T}\perp\vec{B}$，$\|\vec{T}\|=\|\vec{B}\|=1$

∴ 主法线 $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}=\dfrac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\times\vec{r}'}{\|\vec{r}''\|}$ 且 $\|\vec{N}\|=1$.

∵ $\vec{r}'\perp\vec{r}''$ (②中已证) 且 $\|\vec{r}'\|=1$

∴ $\vec{N}=\dfrac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}$ 是单位主法线.

∴ $\begin{cases}\text{主法线}\quad \vec{\rho}=\vec{r}(s_0)+\lambda\vec{N} \\ \text{从切平面}\quad (\vec{\rho}-\vec{r}(s_0))\cdot\vec{N}=0.\end{cases}$

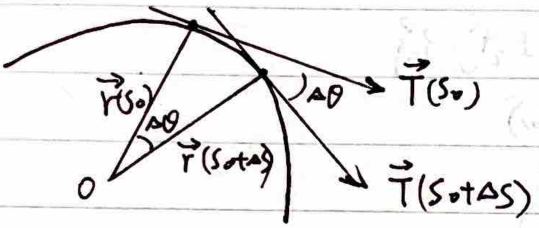
综上：$\begin{cases}\vec{T}=\vec{r}' \quad (\|d\vec{r}\|=ds) \\ \vec{B}=\dfrac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|} \\ \vec{N}=\dfrac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}\end{cases}$ $\begin{cases}\vec{T}=\dfrac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|} \\ \vec{B}=\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|} \\ \vec{N}=\dfrac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|\cdot\|\dot{\vec{r}}\|}\end{cases}$

提示，$\vec{T}$，$\vec{B}$，$\vec{N}$ 构成右手系.

No.
Date

3. 曲线的曲率、挠率及弗雷耐公式

① 曲率



用 $\left\|\frac{\vec{T}(s_0+\Delta s)-\vec{T}(s_0)}{\Delta s}\right\|$ 定义曲率

即 $k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s}\right\|=\|\vec{T}'(s_0)\|=\|\vec{r}''\|$

$=\frac{d\theta}{ds}$.

曲率半径 $R(s)=\frac{1}{k(s)}=\frac{1}{\|\vec{r}''\|}$

对比 $\vec{T}$ 与 $\vec{N}$ 得 $\vec{T}'=k\cdot\vec{N}$

曲率中心 O：$\vec{r}(s)+R(s)\vec{N}(s)$.

若为一般参数 t，则由于 $\vec{r}'=\dot{\vec{r}}\cdot t'(s)=\frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|}$，$\vec{r}''=\ddot{\vec{r}}[t'(s)]^2+\dot{\vec{r}}\,t''(s)$

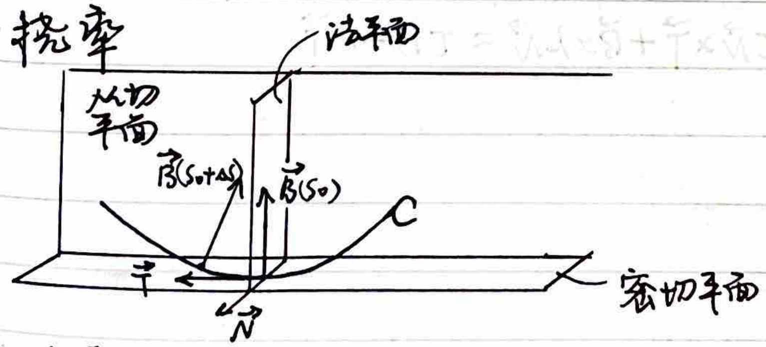
及 $\vec{r}'\cdot\vec{r}''=0$

得 $k=\|\vec{r}''\|=\|\vec{r}'\times\vec{r}''\|=\|\dot{\vec{r}}\cdot t'(s)\times[\ddot{\vec{r}}[t'(s)]^2+\dot{\vec{r}}\cdot t''(s)]\|$

$=\|[t'(s)]^3(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\|$

$=\frac{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3}$.

② 挠率



挠率定义为密切平面的法向量（即副法向量 $\vec{B}$）的变化率 $\frac{d\vec{B}}{ds}=\vec{B}'(s_0)$

在弗雷耐标架 $\{\vec{r}(s);\vec{T}(s),\vec{N}(s),\vec{B}(s)\}$ 中.

由 $\vec{B}\cdot\vec{T}=0$ 两边求导：$\vec{B}'\vec{T}+\vec{B}\cdot\vec{T}'=0$ 代入 $\vec{T}'=k\cdot\vec{N}$ 和 $\vec{B}\cdot\vec{N}=0$ 得

$\vec{B}'\cdot\vec{T}=0$

又∵ $\vec{B}\cdot\vec{B}=1$ 两边求导：$\vec{B}'\cdot\vec{B}=0$

∴ $\vec{B}'$ 同时垂直于 $\vec{T}$ 和 $\vec{B}$ ∴ $\vec{B}'$ 平行于 $\vec{N}$. 写成 $\vec{B}'(s)=-\tau(s)\vec{N}(s)$

∵ $\|\vec{N}\|=1$，$\vec{N}\parallel\vec{B}'$ ∴ $\tau=-\vec{B}'\cdot\vec{N}$；$|\tau|=\|\vec{B}'\|=\frac{d\psi}{ds}$.

No.

Date

自然参数下，由于 $\frac{1}{k}(\vec{r}'''\cdot\vec{B})=\frac{1}{k}((k\vec{N})'\cdot\vec{B})=\frac{1}{k}[(k\vec{N}\cdot\vec{B})'-k\vec{N}\cdot\vec{B}']$

$$=-(\vec{N}\cdot\vec{B}')=\tau$$

而 $\vec{B}=\frac{\vec{r}'\times\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|}=\frac{1}{k}(\vec{r}'\times\vec{r}'')$，代入上式，得

$$\tau=\frac{(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')}{\|\vec{r}''\|^2}$$

一般参数下，结论为 $\tau=\frac{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})}{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})^2}$.

③ 弗雷耐公式

在固定标架 $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 中，$\vec{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$.

在 Frenet 标架 $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ 中，$\vec{r}(s)=\alpha(s)\vec{T}+\beta(s)\vec{N}+\gamma(s)\vec{B}$

这个标架是活动的，其一阶导为

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds}=\alpha'\vec{T}+\beta'\vec{N}+\gamma'\vec{B}+\alpha\vec{T}'+\beta\vec{N}'+\gamma\vec{B}'$$

由于 $\vec{T}'=k\vec{N}$，$\vec{B}'=-\tau\vec{N}$，对 $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$ 两边求导：

$$\vec{N}'=\vec{B}'\times\vec{T}+\vec{B}\times\vec{T}'=-\tau\vec{N}\times\vec{T}+\vec{B}\times k\vec{N}=\tau\vec{B}-k\vec{T}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}\vec{T}'\\\vec{N}'\\\vec{B}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{T}\\\vec{N}\\\vec{B}\end{pmatrix}.$$

定理：设 $\vec{r}=\vec{r}_1(s)$，$\vec{r}=\vec{r}_2(s)$ 是 R^3 中两条正则曲线，如果它们的 k 处处非零，且 $k_1(s)=k_2(s)$，$\tau_1(s)=\tau_2(s)$，则 $\vec{r}_1(s)$ 必可通过平移和旋转变换而与 $\vec{r}_2(s)$ 重合.

No.

Date

4. 曲面参数方程及其法向量的表示.

R^3中曲面S的显示表示 $z=f(x,y)$ 隐式 $F(x,y,z)=0$

参数方程表示 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$.

满足 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ 的点 (u,v) 是曲面的正则点. 否则是奇点.

若 $\forall(u,v)\in D$, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{pmatrix}=2$. 则 $\vec{r}(u,v)$ 是正则曲面.

过曲面上点 $\vec{r}(u_0,v_0)$ 的

$$\left.\begin{cases}u\text{坐标曲线: }\vec{r}=\vec{r}(u,v_0)\\ v\text{坐标曲线: }\vec{r}=\vec{r}(u_0,v).\end{cases}\right\}\text{坐标网}$$

u,v: 曲线坐标.

① u曲线、v曲线的切向量:

$$\begin{cases}\vec{r}_u(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}.\\ \vec{r}_v(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}.\end{cases}$$

② 参数变换 $[\vec{r}=\vec{r}(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))]$

$$\begin{cases}u=u(\bar{u},\bar{v})\\ v=v(\bar{u},\bar{v}).\end{cases}$$

曲面在新参数下的方程: $\vec{r}=\vec{r}(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))$.

新参数下的 $\bar{u}$曲线、$\bar{v}$曲线切向量:

$$\begin{cases}\vec{r}_{\bar{u}}=\vec{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}+\vec{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\ \vec{r}_{\bar{v}}=\vec{r}_u\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}+\vec{r}_v\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}.\end{cases}\Rightarrow\vec{r}_{\bar{u}}\times\vec{r}_{\bar{v}}=\frac{D(u,v)}{D(\bar{u},\bar{v})}(\vec{r}_u\times\vec{r}_v).$$

∴ 曲面的法线方向与正则性和参数选~~择~~择无关

③ 切平面、法线的方程.

考虑曲面S上一条曲线C的切向量, 设C: $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$.

$$\therefore\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

$$\left.\begin{cases}\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\\ \vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\end{cases}\right\}$$

u曲线 v曲线在同一点处的切向量.

No.

Date

$\because \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ 即 $\vec{r}_u$ $\vec{r}_v$ 线性无关时，过曲面上点 $P(t)$ 的任意曲线C的切向量均可由 $\vec{r}_u$ $\vec{r}_v$ 线性表出.

称由 $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ 张成的平面 T_P 为曲面S在 $P(t)$ 处的切平面.

$\therefore$ 过P的任意切向量 $\frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$.

称 $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ 或 (du, dv) 为过P点的切方向.

切平面 T_P 的法向量 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$，$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ 为单位法向量.

$\therefore$ 切平面方程：$\vec{n}(\vec{\rho} - \vec{r}) = 0$ or $(\vec{\rho} - \vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0$

or $\vec{\rho}(\lambda, \mu) = \vec{r} + \lambda \vec{r}_u + \mu \vec{r}_v$.

法线方程：$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u, v) + t\vec{n}(u, v)$. t 是参数 $-\infty < t < +\infty$.

5. 曲面的第一基本形式

设曲线 $C \subset S$: $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

$\therefore$ C在P(位置向量(矢径)为 $\vec{r}$)的切向量 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$.

即 $d\vec{r} = (\vec{r}_u\ \vec{r}_v) \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$.

对于弧长参数s，有 $ds = \|d\vec{r}\|$.

$\therefore ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v du \cdot dv + \vec{r}_v^2 dv^2$

记 $E = \vec{r}_u^2$，$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$，$G = \vec{r}_v^2$

记 $I(du, dv) = ds^2 = d\vec{r}^2 = (du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$.

其中 $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ 的各阶主子式 >0 是正定矩阵.

① 第一基本形式与参数选取无关.

$\begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases}$ $\frac{D(u, v)}{D(\bar{u}, \bar{v})} > 0$.

$\because \begin{cases} \vec{r}_{\bar{u}} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \vec{r}_{\bar{v}} = \vec{r}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \vec{r}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{cases}$ $\therefore \begin{pmatrix} \vec{r}_{\bar{u}} \\ \vec{r}_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right)^T \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix}$.

记新参数下的第一类基本量为 $\bar{E} = \vec{r}_{\bar{u}}^{\,2}$，$\bar{F} = \vec{r}_{\bar{u}} \cdot \vec{r}_{\bar{v}}$，$\bar{G} = \vec{r}_{\bar{v}}^{\,2}$

$\therefore \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_{\bar{u}} \\ \vec{r}_{\bar{v}} \end{pmatrix} (\vec{r}_{\bar{u}}\ \vec{r}_{\bar{v}}) = J^T \begin{pmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{pmatrix} (\vec{r}_u, \vec{r}_v) \cdot J = J^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J$，与 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 相合.

又 $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}$ $\therefore (du, dv) = (d\bar{u}, d\bar{v}) \cdot J^T$

$\therefore ds^2 = I(du, dv) = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (d\bar{u}, d\bar{v}) J^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}$

$= (d\bar{u}, d\bar{v}) \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix} = I(d\bar{u}, d\bar{v})$.

② 曲面上曲线的度量 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$

弧长 $L = \int_a^b \sqrt{ds^2} = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$

夹角：$C_1\ C_2 \subset S$. 其切向量分别为 $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$，$\delta \vec{r} = \vec{r}_u \delta u + \vec{r}_v \delta v$.

$\therefore \cos\langle d\vec{r}, \delta\vec{r} \rangle = \frac{d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}}{\|d\vec{r}\| \cdot \|\delta\vec{r}\|} = \frac{E du \delta u + F(du\delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}$

若 $C_1 \cdot C_2$ 分别是 u 曲线 $(dv=0)$ 和 v 曲线 $(d\delta u = 0)$

则 $\cos(d\vec{r}, \delta\vec{r}) = \frac{F}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}}$ $\therefore$ 曲面的参数曲线网是正交坐标网的充要条件是 $F=0$：$\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$.

6. 曲面的第二基本形式.

$\vec{r}' = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$

$\therefore \vec{r}'' = (\vec{r}_u u' + \vec{r}_v v')' = \vec{r}_u u'' + \vec{r}_v v'' + \vec{r}_{uu}(u')^2 + 2\vec{r}_{uv} u' v' + \vec{r}_{vv}(v')^2$

$\therefore \vec{r}'' \cdot \vec{n}^\circ = (\vec{r}_{uu}(u')^2 + 2\vec{r}_{uv} u'v' + \vec{r}_{vv}(v')^2) \cdot \vec{n}^\circ$ $(\vec{r}_u, \vec{r}_v \perp \vec{n}^\circ)$.

$= (\vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}^\circ)(u')^2 + (2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{n}^\circ) u'v' + (\vec{r}_{vv} \cdot \vec{n}^\circ)(v')^2$.

No.

Date

记 $L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}^{\circ}$，$M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}^{\circ}$，$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}^{\circ}$.

记 $\mathrm{II}(du,dv)=(\vec{r}''\cdot\vec{n}^{\circ})\cdot ds^2=[L(u')^2+2Mu'v'+N(v')^2]ds^2$

$$=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$$

$$=(du,dv)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}.$$

又∵对 $\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}=0$ 和 $\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}$ 求导后有

$$\begin{cases}\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}^{\circ}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}_u, & \vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}^{\circ}=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}_v\\ \vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}^{\circ}=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}_v=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}_u\end{cases}$$

∴ $L=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}_u$，$M=-\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}_v=-\vec{r}_v\vec{n}^{\circ}_u$，$N=-\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}_v$

∴ $\mathrm{II}(du,dv)=-[\vec{r}_u\cdot\vec{n}^{\circ}_u du^2+(\vec{r}_u\vec{n}^{\circ}_v+\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}_u)du\,dv+\vec{r}_v\cdot\vec{n}^{\circ}_v dv^2]$

$$=-(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)\cdot(\vec{n}^{\circ}_u du+\vec{n}^{\circ}_v dv)$$

$$=-d\vec{r}\cdot d\vec{n}^{\circ}.$$

①法曲率：

空间曲线上一点的曲率 $k=\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|=\|\vec{r}''\|$

空间曲面上一点的曲率 k_n 则通过过此点所有曲线的曲率入手来定义．

设 S：$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 是一正则曲面，$P(u,v)$ 是 S 上一点，S 在 P 的切平面为 Π_P．单位法向量为 $\vec{n}^{\circ}$．过 P 的 S 上一曲线 C：$\vec{r}=\vec{r}(u(s),v(s))$ 在 P 的曲率为 k．在 P 点有标准正交标架 $\{P;\vec{T},\vec{n}^{\circ},\vec{T}\times\vec{n}^{\circ}\}$

其中 $\vec{T}=\vec{r}'$，$\vec{T}'=\vec{r}''=k\vec{N}\perp\vec{T}$（前已记）

∴ $k\vec{N}$ 在 $\vec{n}^{\circ}$ 和 $\vec{T}\times\vec{n}^{\circ}$ 张成的平面内，表示为

$$k\vec{N}=k_n\vec{n}^{\circ}+k_g(\vec{n}^{\circ}\times\vec{T}).\quad (*)$$

$\begin{cases}k_n：法曲率\\ k_g：测地曲率\end{cases}$ $\begin{cases}k_n\vec{n}^{\circ}：法曲率向量\\ k_g(\vec{n}^{\circ}\times\vec{T})：测地曲率向量.\end{cases}$

(*)式两边点乘 $\vec{n}^{\circ}$，$k_n=k\vec{N}\cdot\vec{n}^{\circ}$ $(\|\vec{n}^{\circ}\|=1,\|\vec{N}\|=1)$

$=k\cdot\cos\varphi$. ∴ $R=R_n\cos\varphi$. $\begin{cases}R：过P一曲线C曲率圆半径\\ R_n：过P此曲面S曲率球半径.\end{cases}$

No.
Date

$\because \vec{N} = \frac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|} = \frac{\vec{r}''}{k}$

$\therefore k_n = \vec{r}'' \cdot \vec{n}^0 = \frac{\mathrm{II}(du, dv)}{\mathrm{I}(du, dv)} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$

$= \frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{dv}\right) + N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}$.

$\therefore k_n$ 除与 $L、M、N、E、F、G$ 有关外，仅依赖于 $\frac{du}{dv}$.

② 主曲率.

使法曲率 k_n 取极值的方向 (du, dv) 称为曲面在该点的主方向。(在切平面上)

该极值（极大及极小）是曲面在该点的主曲率.

$\because \mathrm{I}(du, dv)、\mathrm{II}(du, dv)$ 与参数的选择无关

$\therefore$ 可选合适的新参数 使 $\mathrm{I}(du, dv)、\mathrm{II}(du, dv)$ 这两个二次型同时化为相合标准形.

$\because A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 是正定矩阵（正惯性指数 $=2$），$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵.

$\therefore \exists W$ 可逆，使 $W^TAW = E_{2\times2}$，$W^TBW = diag(\lambda_1, \lambda_2)$

证明：$\exists R$ 可逆，使 $R^TAR = E$. 而 R^TBR 仍为实对称

$\therefore \exists Q$ 正交阵，使 $Q^T(R^TBR)Q = diag(\lambda_1, \lambda_2)$，而 $Q^T(R^TAR)Q = Q^TEQ = E$.

$\therefore W = RQ$.

$\therefore$ 作参数变换 $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}$

$\therefore k_n = \frac{\mathrm{II}(du, dv)}{\mathrm{I}(du, dv)} = \frac{\mathrm{II}(d\bar{u}, d\bar{v})}{\mathrm{I}(d\bar{u}, d\bar{v})} = \frac{\lambda_1 d\bar{u}^2 + \lambda_2 d\bar{v}^2}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2}$.

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，设 $\lambda_1 < \lambda_2$，$\therefore \frac{\lambda_1(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2} \leq \frac{\lambda_1 d\bar{u}^2 + \lambda_2 d\bar{v}^2}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2} \leq \frac{\lambda_2(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2}$

即 $\lambda_1 \leq k_n \leq \lambda_2$

$\therefore \lambda_1、\lambda_2$ 是曲面 S 在 $P(u, v)$ 处的主曲率.

No.

Date

定理：若曲面 $S: \vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 在 P 处主曲率 λ_1 λ_2 不相等，则 λ 是主曲率的充要条件是满足 $|\lambda A-B| = \left|\lambda\begin{pmatrix}E & F\\F & G\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}L & M\\M & N\end{pmatrix}\right|=0$

证明：$\because$ 已证 $W^TBW=diag(\lambda_1,\lambda_2)$ 即主曲率 λ_1 λ_2 是 R^TBR 的特征值.

$\therefore$ λ 为主曲率的充要条件是 λ 满足 R^TBR 的特征方程：

$$|\lambda E-R^TBR|=0$$

又 $\because$ $R^TAR=E$ $\therefore$ $|\lambda E-R^TBR|=|\lambda R^TAR-R^TBR|=|R|^2|\lambda A-B|$

$\because$ R 可逆 $\therefore$ $|R|\neq 0$ $\therefore$ $|\lambda A-B|=0$.

定理：两个主曲率对应的主方向正交.

证明：由 $k_n=\dfrac{\lambda_1 d\bar{u}^2+\lambda_2 d\bar{v}^2}{d\bar{u}^2+d\bar{v}^2}$ 知，

当 $d\bar{v}=0$ 时，$k_n=\lambda_1$；当 $d\bar{u}=0$ 时，$k_n=\lambda_2$

$\therefore$ $(d\bar{u},0)$ 和 $(0,d\bar{v})$ 是主曲率 λ_1 λ_2 对应的两个主方向.

$\therefore$ 原参数 u,v 下的主方向表示式为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}_1=W\begin{pmatrix}d\bar{u}\\0\end{pmatrix}=(\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2)\begin{pmatrix}d\bar{u}\\0\end{pmatrix}=d\bar{u}\cdot\vec{\alpha}_1=d\vec{r}_1\\[2ex]\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}_2=W\begin{pmatrix}0\\d\bar{v}\end{pmatrix}=(\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2)\begin{pmatrix}0\\d\bar{v}\end{pmatrix}=d\bar{v}\,\vec{\alpha}_2=d\vec{r}_2\end{cases}$$

这里的主方向 $\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}_i$ 是主方向 $d\vec{r}_1$、$d\vec{r}_2$ 在切空间的基 $\{\vec{r}_u,\vec{r}_v\}$ 下的坐标向量

不妨设 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是两个主方向向量 $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2$ 在基 $\{\vec{r}_u\ \vec{r}_v\}$ 下的坐标向量，即

$$\vec{e}_j=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)\begin{pmatrix}\omega_{1j}\\\omega_{2j}\end{pmatrix}=(\vec{r}_u,\vec{r}_v)\vec{\alpha}_j\qquad j=1,2.$$

$$\therefore (\vec{e}_1,\vec{e}_2)=(\omega_{11}\vec{r}_u+\omega_{21}\vec{r}_v)(\omega_{12}\vec{r}_u+\omega_{22}\vec{r}_v)=(\omega_{11},\omega_{21})\begin{pmatrix}\vec{r}_u^{\,2} & \vec{r}_u\vec{r}_v\\\vec{r}_u\vec{r}_v & \vec{r}_v^{\,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{12}\\\omega_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\vec{\alpha}_1^TA\vec{\alpha}_2$$

又 $\because$ $$W^TAW=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1^T\\\vec{\alpha}_2^T\end{pmatrix}A(\vec{\alpha}_1\ \vec{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1^TA\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1^TA\vec{\alpha}_2\\\vec{\alpha}_2^TA\vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2^TA\vec{\alpha}_2\end{pmatrix}=E$$

$\therefore$ $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\vec{\alpha}_1^TA\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}_2^TA\vec{\alpha}_1=0$. 两个主方向正交.

No.

Date

③ 高斯曲率(全曲率)和平均曲率.

高斯曲率 $K=k_1\cdot k_2$

平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$.

其中 k_1 k_2 为P处的主曲率 λ_1 λ_2.

根据 $\left|\lambda\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\right|=0$ 即 $(EG-F^2)\lambda^2-(LG-2MF+NE)\lambda+(LN-M^2)=0$

得 $K=\dfrac{\begin{vmatrix}L&M\\M&N\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}E&F\\F&G\end{vmatrix}}$ $H=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\begin{vmatrix}E&M\\F&N\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}L&F\\M&G\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}E&F\\F&G\end{vmatrix}}\right)$.

定理: 设 S_1、S_2 是定义在 $D\subset R^2$ 上的两个正则曲面,如果在每一点 $(u,v)\in D$ S_1、S_2 有相同的第一、第二基本形式,则 S_1 必可通过平移和旋转变换而与 S_2 重合.

No.

Date

一. 多元函数及其微分学

1. n维 Euclid 空间

$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in R, i=1,2,\cdots,n\}$

对加法和数乘，R^n 构成实数域上的线性空间.

Euclid 距离：$\|X-Y\|_n=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

$$\begin{cases} X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n \\ Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{正定性：} \|X-Y\|\geq 0 \text{，当且仅当 } X=Y,\ \|X-Y\|=0 \\ \text{对称性：} \|X-Y\|=\|Y-X\| \\ \text{三角不等式：} \forall Z\in R^n, \|X-Y\|\leq\|X-Z\|+\|Z-Y\| \end{cases}$$

X_0 点的 δ 邻域：$B(X_0,\delta)=\{X\in R^n \mid \|X-X_0\|<\delta\}$

X_0 点的去心 δ 邻域：$B(X_0,\delta)=\{X\in R^n \mid 0<\|X-X_0\|<\delta\}$.

内点：$S\subset R^n$，$X_0\in R^n$，$\exists X_0$：$B(X_0,\delta)\subset S$，X_0 是集合 S 的一个内点

边界点：$S\subset R^n$，$X_0\in R^n$，$\forall\delta>0$，$B(X_0,\delta)\cap S\neq\phi$，$B(X_0,\delta)\not\subset S$，$X_0$ 是 S 的边界点

闭集 $=R^n\setminus$ 开集　（开集：S 中每一点均为内点）.

内部：S 中所有内点构成的集合：$\mathring{S}$　（S 的最大开集）

边界：S 的所有边界点构成的集合：∂S.（不一定属于 S）

闭包：$\bar{S}=S\cup\partial S$，（$\bar{S}$ 是闭集）.

$D\subset R^2(R^3)$ 连通：$\forall\xi,\eta\in D$，$\exists$ line connect ξ & η，line $\subset D$.

开区域：$R^2(R^3)$ 中非空连通开集

闭区域：开区域的闭包

2. R^n 中的点列

设 $X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in R^n$，$k=1,2,\cdots$

则 $\{X_k\}$：$X_1,X_2,\cdots,X_k,\cdots$ 为 R^n 中的一个点列.

$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$, $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = A$:
$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_0\in N^*$ $\forall k>N_0$ $\|X_k-A\|<\varepsilon$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)}=a_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

R^n中的 Cauchy 序列:
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N_0\in N^*$, $\forall m,k>N_0$, $\|X_m-X_k\|<\varepsilon$. $\Leftrightarrow$ R^n是完备的.

3. 函数

n元函数: $f: \Omega\subset R^n\to R^1$
$X\mapsto u$

显式表示: $u=f(X)$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
隐式表示: $F(x_1,x_2\cdots,x_n,u)=0$.

向量值函数: $f: \Omega\subset R^n\to R^m$
$X\mapsto Y$

$f(\Omega)=\{Y\in R^m \mid \exists X\in\Omega, Y=f(X)\}$
其中每个分量 y_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 都是 $X=(x_1,x_2\cdots x_n)$ 的n元函数
$y_j=f_j(x_1,x_2\cdots,x_n)$, $(x_1,x_2\cdots,x_n)\in\Omega$

复变函数: $f: \Omega\subset C\to C$
$(x,y)\in\Omega\mapsto(u,v)$.

$\begin{cases}\text{实部函数 } u=u(x,y)\\ \text{虚部函数 } v=v(x,y).\end{cases}$

No.

Date

4. 极限与连续

极限的定义：$f: \Omega \subset R^n \to R^m$，$X_0 \in R^n$，f在$X_0$的去心邻域$B_0(X_0, \delta)$有定义

$\exists A \in R^m$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall X \in \Omega$ $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$：

$\|f(X) - A\|_m < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A$.

$m=1$时，退化为多元函数的极限：

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall X \in \Omega \subset R^n$ $0 < \|X - X_0\|_n < \delta$：$|f(X) - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{X \to X_0} f_j(X) = a_j$，$j = 1, 2, \cdots, m$. $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$.

对于向量值函数（包括n元函数），Cauchy收敛准则及函数极限与序列极限的等价关系仍存在.

连续的定义：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall X$：$\|X - X_0\|_n < \delta$，均有$\|f(X) - f(X_0)\|_m < \varepsilon$

$m=1$时，退化为多元函数的连续性定义.

$\Leftrightarrow$ m个分量函数的连续.

若X_0是向量值函数$f(X)$定义域Ω的边界点，连续性定义为

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall X$：$X \in B(X_0, \delta) \cap \Omega$，均有$\|f(X) - f(X_0)\| < \varepsilon$.

最值定理：$\Omega \subset R^n$为有界闭集，n元函数$f \in C(\Omega)$，则

$\exists \xi, \eta \in \Omega$，$\forall X \in \Omega$，$m = f(\xi) \le f(X) \le f(\eta) = M$.

介值定理：设f为连通域Ω上的连续函数，$X_1, X_2 \in \Omega$，

$f(X_1) = \lambda$，$f(X_2) = \mu$，$\exists X \in \Omega$，$f(X) = \sigma \in (\lambda, \mu)$.

k阶无穷小：$\exists \beta > 0$，$\delta > 0$，使$\forall X \in B_0(X_0, \delta)$：$|f(X)| \le \beta \rho^k$.

其中 $\rho^k = \|X - X_0\|^k = \left(\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2}\right)^k$.

5. 多元函数的全微分及偏导数.

n元函数 $u=f(X)$ 在 $B(X_0, r)$ 内有定义，其中

$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$X_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$

$\forall X\in B(X_0, r)$，$\Delta u=f(X)-f(X_0)=a_1(x_1-x_1^{(0)})+\cdots+a_n(x_n-x_n^{(0)})+o(\rho)$

则称 $u=f(X)$ 在 X_0 点可微.

$du=a_1(x_1-x_1^{(0)})+a_2(x_2-x_2^{(0)})+\cdots+a_n(x_n-x_n^{(0)})$

$=a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots+a_ndx_n$ 称为 u 在 X_0 点的全微分.

可见，当 $\Delta X=X-X_0\to\vec{0}$ 时，$f(X)\to f(X_0)$，故可微函数必连续.

偏导数：$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\cdots x_n^{(0)})=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}$，可见可微函数的$n$个偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_1}(X_0)$，$\frac{\partial u}{\partial x_2}(X_0)\cdots\frac{\partial u}{\partial x_n}(X_0)$ 均存在. 且 $a_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}(X_0)$.

且 $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$.，反之不成立.

△根据定义判断可微性：$(\Delta u=f(X)-f(X_0))=\Delta u-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)dx_i$ 是否是 ρ的高阶无穷小. 即 $\lim\limits_{X\to X_0}\frac{\Delta u-\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i}{\rho}\overset{?}{=}0$.

△根据偏导数连续性判断可微性：若n元函数 $u=f(X)$ 的所有偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)$ 在 X_0 点均连续，则 $f(X)$ 在 X_0 点可微.
反之不成立.

No.

Date

偏导数反映多元函数沿坐标轴的变化率，方向导数反映函数沿过某点任意方向 $\vec{l}$ 上的变化率. $\vec{l}^{\circ}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

$P(x,y,z)\in B(P_0,\delta)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in l}}\frac{f(P)-f(P_0)}{\|P-P_0\|}$.

$\because \Delta u=f(P)-f(P_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\Delta y+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\Delta z+o(\rho)$

且 $\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\cos\beta$, $\Delta z=\rho\cos\gamma$.

$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\cos\gamma$.

一般地，$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{P_0}\cos\alpha_i$.

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\\ \vdots\\ \cos\alpha_n\end{pmatrix}$$

$$=\operatorname{grad} u(P_0)\cdot\vec{l}^{\circ}=\nabla u(P_0)\cdot\vec{l}^{\circ}.$$

高阶偏导数：对偏导函数求偏导.

设 $\Omega\subset R^n$ 是开域，若 n 元函数 $u=f(X)$ 在 Ω 上的 k 阶偏导都连续，则称 u 在 Ω 上 k 阶连续可微：$u\in C^{(k)}(\Omega)$. 此时，u 的 r 阶混合偏导数 $(2\leq r\leq k)$ 与求导顺序无关.

高阶微分：易证 $d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n(z)$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k\right)(z)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k.$$

对于一般的 n 元函数，~~对一般~~ 也可用类似但更麻烦的方法求.

No.

Date

6. 向量值函数的微分

$f(X)$在X_0的全微分：$df(X_0) = A\Delta X\ (AdX)$ 线性部分

$+$

$o\|\Delta X\|$，ΔX为列向量.

$\|$

$\Delta f = f(X_0+\Delta X) - f(X_0) = A\Delta X + o(\|\Delta X\|)$. A：Jacobi 矩阵.

对于~~向量~~n元函数，$\Delta f = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\Delta X$. 其 Jacobi矩阵是一行向量.

$\because \Delta f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)\Delta X$

$$\therefore J(f(X_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X_0} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}_{X_0} = \left.\frac{\partial(f_1, f_2 \cdots f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}\right|_{X_0}.$$

对复合向量值函数 $f\circ g$，有

$$d(f\circ g)(X_0) = \left.\frac{\partial(y_1, y_2 \cdots y_k)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_m)}\right|_{u_0} \left.\frac{\partial(u_1, u_2 \cdots u_m)}{\partial(x_1, x_2 \cdots x_n)}\right|_{X_0} dX.$$

若 $k=1$，化为 $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

对于一般复合函数 $y = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$.，$u_j = g_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

若 f，g_j 都 $\in C^{(2)}$，则

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial y}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial u_s}\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{m}\left[\left(\sum_{t=1}^{m}\frac{\partial^2 y}{\partial u_t \partial u_s}\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_t \partial x_j}\right].$$

……

No.

Date

7. 隐(向量值)函数的存在性及其微分.

设 $n+1$ 元函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 在点 $P_0(\vec{X}_0, y_0)$ 的某邻域 $B(P_0, r)$ 内是 $C^{(1)}$ 类函数，且 $F(\vec{X}_0, y_0)=0$，$\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{X}_0, y_0)\neq 0$，则存在

$$B(X_0, \delta)\times(y_0-\eta, y_0+\eta)\subset B(P_0, r)$$

使 $\forall X\in B(X_0, \delta)$，存在唯一 $y\in(y_0-\eta, y_0+\eta)$ 满足 $F(\vec{X}, y)=0$.

即确定了一个 n 元隐函数 $y=f(X)$，使得 $F(X, f(X))=0$. 且

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y)} \qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

设 m 个 $n+m$ 元函数 $F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 在 P_0 点的某邻域 $B(P_0, r)$ 内 $\in C^{(1)}$，$F_i(P_0)=0$，且 $\left.\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right|_{P_0}$ 可逆，则存在

$$B(X_0, \delta)\times B(Y_0, \eta)\subset B(P_0, r)$$

使 $\forall X\in B(X_0, \delta)$，存在唯一 $Y\in B(Y_0, \eta)$ 满足 $F_i(X, Y)=0$，$i=1, 2, \cdots, m$.

即在 $B(X_0, \delta)\times B(Y_0, \eta)$ 内确定了一个向量值隐函数 $Y=f(X)$. 且

$$J(f(X))=\frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}=-\left(\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1, \cdots, F_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}.$$

$Y=f(X)$，$X=g(Y)$ $\quad R^n\to R^n$，$J(f(X_0))$ 可逆，则 $J(g(Y))=[J(f(X))]^{-1}$.

即 $J(f^{-1}(Y))=[J(f(X))]^{-1}$.

(由方程组 $F(X, Y)=\vec{0}=f(X)-Y$ 确定的隐向量值函数 $X=g(Y)$)

8. 曲面与曲线的表示法　切平面与法线.

①曲面的显函数表示法:

$$S: z=f(x,y).$$

切平面: $z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$

法向量: $\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{P_0}$

法线: $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.$

②曲面的参数表示法:

$$S:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D_{uv}\subset R^2.$$

切平面: $\begin{cases}x-x_0=\frac{\partial x}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial x}{\partial v}(v-v_0)\\ y-y_0=\frac{\partial y}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial y}{\partial v}(v-v_0)\\ z-z_0=\frac{\partial z}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial z}{\partial v}(v-v_0).\end{cases}$

法向量: $\vec{n}=\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}.$

法线: $\dfrac{x-x_0}{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}.$

③曲面的隐函数表示法.

$$S: F(x,y,z)=0.$$

切平面: $\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0.$

法向量: $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}.$

法线: $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$

No.

Date

④ 空间曲线的参数表示法

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

切线：
(法线)
$$\begin{cases} x - x_0 = x'(t - t_0) \\ y - y_0 = y'(t - t_0) \\ z - z_0 = z'(t - t_0) \end{cases}$$

法平面：$x'(x - x_0) + y'(y - y_0) + z'(z - z_0) = 0.$

⑤ 空间曲线的曲面交线表示法：

$$L: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

设 F_1、F_2 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微，则两曲面在 P_0 的切平面分别为

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(z - z_0) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

两切平面联立即为 L 在 P_0 的切线方程，切方向为

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}\right).$$

9. Taylor公式　多元函数的极值与条件极值

$$f(X) = f(X_0) + J(f(X_0))\Delta X + \frac{1}{2!}(\Delta X)^T H(X^*)\Delta X, \quad 其中\ X^* = X_0 + \theta\Delta X, \ 0<\theta<1.$$

$$J(f(X_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{X_0} \qquad H(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}_X$$

No.

Date

证明：构造一元函数

$g(t)=f(X_0+t\Delta X)$ $\quad\therefore g(1)=f(X)$，$g(0)=f(X_0)$

$g(t)$在$t=0$点的一阶泰勒公式为 $g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2!}g''(\theta)t^2 \quad \theta\in(0,1)$

其中，$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n=J(f(X_0+t\Delta X))\Delta X$.

$g'(0)=J(f(X_0))\Delta X$

$g''(t)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Delta x_j\Delta x_i$

$=(\Delta X)^T H(X_0+t\Delta X)(\Delta X)$

$g''(\theta t)=(\Delta X)^T H(X_0+\theta t\Delta X)\Delta X$

取$t=1$即得.

如果X_0是f的一个极大(小)值点，则$\nabla f(X_0)=\vec{0}$. 前提是f在X_0可微。

称X_0为f的驻点，它是X_0为极值点的必要条件.

假设f在X_0的某邻域$B(X_0,\delta)$内二阶连续可微，若f在X_0点的Hesse矩阵$H(X_0)$正定，则X_0是f的极小值点；负定，则X_0是f的极大值点.

条件极值问题：

$$\begin{cases} \min(\max) f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

设$f:\Omega\subset R^n\to R^1$，$\varphi:\Omega\subset R^n\to R^1$均为一阶连续可微函数，且$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$不全为零

则以上条件极值问题在Ω中的极值点一定是Lagrange函数

$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

的驻点.

证明：x_n可表示成 $x_n=g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$. 求$f$的极值点：

$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}[f(x_1,\cdots,x_{n-1},g(x_1,\cdots,x_{n-1}))]=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_i}=0$.

又 $\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ $\quad\therefore\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=-\lambda$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$ $\quad(i=1,2,\cdots,n)$

No.

Date

二. 重积分.

分割、取点、作黎曼和，求极限、验证极限值与分割和取点无关

⇒ n重积分

① 二重积分的算法：

累次积分法：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$

$$= \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

变量代换法：$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$

② 三重积分的算法：

累次积分法：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$

变量代换法：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega^*} f(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,s,t)}\right| drdsdt$

柱坐标下：$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\therefore \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

球坐标下：$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta.$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

$$\therefore \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

曲面的面积问题：

空间曲面的参数方程：$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$.

它确定了 $D(\subset R^2)\to R^3$ 的一个向量值函数 $\vec{r}$：

$$\vec{r}(u,v)=(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

当 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ 的秩为2，$O-uv$ 与 $O-xyz$ 中的点一一对应
（平面）　（曲面）.

前面已得 $S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，其中

$$\begin{cases} E=\vec{r}_u^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ G=\vec{r}_v^{\,2}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\ F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

特殊地，以 x、y 为参数的参数方程 $\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$，$(x,y)\in D_{xy}$

则 $S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$，其中

$$\begin{cases} E=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \\ G=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \\ F=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

No.

Date

三. 第一类曲线积分与第一类曲面积分

	积分域
定积分	R^1中的区间
曲线积分	曲线
曲面积分	曲面.

1. 第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$$

① $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)\,dl.$

② $\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_{L_1} f(x,y,z)\,dl + \int_{L_2} f(x,y,z)\,dl.$

③ 中值定理：若函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则在 L 上存在一点 (ξ,η,ζ)

使 $\int_L f(x,y,z)\,dl = f(\xi,\eta,\zeta)L.$

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

则 $\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt.$

2. 第一类曲面积分.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

设 S 是光滑的，其参数方程为 $\vec{r}=(x,y,z)=\vec{r}(u,v)$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

No.

Date

四. 第二类曲线积分与第二类曲面积分.

1. 第二类曲线积分

$$\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L(A)}^{(B)} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz.$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right]$$

① $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{L(B)}^{(A)} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$

② $\int_{L(A_1)}^{(A_3)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L(A_1)}^{(A_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L(A_2)}^{(A_3)} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$

③ 当路径L为封闭曲线时，规定逆时针方向为正方向：$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$

$$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{L_1^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \oint_{L_2^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

设L是R^3中的一条光滑曲线：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$.

向量函数 $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$.

则 $\int_{L(A)}^{(B)} P(x,y,z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt.$

$\int_{L(A)}^{(B)} Q(x,y,z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt.$

$\int_{L(A)}^{(B)} R(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt.$

三者相加即为 $\int_{L(A)}^{(B)} (P,Q,R)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$

同时 $\int_{L(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl$

与第一类曲线积分相联系.

No.

Date

2. 第二类曲面积分

曲面的定向：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v). \end{cases} \quad (u,v)\in D_{uv}\subset R^2$$

$$\vec{n}_\pm = \pm\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)\times\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right) \neq \vec{0}.$$

$$\iint_{S^+}\vec{V}(x,y,z)\cdot d\vec{S} = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(Q_i)\cdot\Delta\vec{S}_i = \iint_{S^+}\vec{V}\cdot dS\cdot\vec{n}^\circ$$

$$= \iint_{S^+}\vec{V}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}\cdot dS = \iint_{S^+}(P,Q,R)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}\cdot dS = \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_{S^+} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy.$$ 注意正法向间的夹角.

$$\begin{cases} \text{有向性：} \iint_{S^-}\vec{V}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S^+}\vec{V}\cdot d\vec{S} \\ \text{可加性（正侧一致）：} \iint_{S^+}\vec{V}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1^+}\vec{V}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2^+}\vec{V}\cdot d\vec{S}. \end{cases}$$

又∵ $\vec{n}^\circ = \pm\dfrac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|} = \pm\dfrac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$

（其中 $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$，$B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$，$C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$）

$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$

$$\therefore \begin{cases} dy\wedge dz = \cos\alpha\,dS = \pm A\,du\,dv \\ dz\wedge dx = \cos\beta\,dS = \pm B\,du\,dv \\ dx\wedge dy = \cos\gamma\,dS = \pm C\,du\,dv \end{cases}$$

$$\therefore \iint_{S^+} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy = \pm\iint_{D_{uv}}(PA+QB+RC)\,du\,dv.$$

同时，$\iint_{S^+}\vec{V}\,d\vec{S} = \iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ 是与第一类曲面积分的联系.

No.

Date

3. 平面和空间中的向量场.

① 平面上的 Green 公式:

$$\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_{D}\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

对于一般的复连通域，加几条辅助线后再用 Green.

可见 $\int_{L(A)}^{(B)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L(A)}^{(B)}Pdx+Qdy$ 在域 D 内与积分路径无关

$\Leftrightarrow \oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\cdot \Leftrightarrow$

微分式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在单连通域 D 上存在原函数.

$\Leftrightarrow \int_{A_1(x_1,y_1)}^{A_2(x_2,y_2)}Pdx+Qdy=u(x,y)\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$

② Gauss 公式:

$$\iint_{\partial\Omega^+}\vec{V}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\vec{V}\cdot dv$$

③ 空间中的 Green $\longrightarrow$ Stokes 公式

$$\oint_{\partial S^+}\vec{V}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}\mathrm{rot}\,\vec{V}\cdot d\vec{S}.$$

其中 $\mathrm{rot}\,\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=(R_y-Q_z)\vec{i}+(P_z-R_x)\vec{j}+(Q_x-P_y)\vec{k}$

$\therefore \oint_{\partial S^+}\vec{V}\cdot d\vec{r}=\iint_{S^+}(R_y-Q_z)dy\wedge dz+(P_z-R_x)dz\wedge dx+(Q_x-P_y)dx\wedge dy.$

若所围 S 中有不满足条件的点，可作辅助线另寻路径使 S 上不包含那些点

No.

Date

$\mathrm{rot}\,\vec{V}=\vec{0} \Leftrightarrow \forall\Omega$中闭曲线$L$，$\oint_L \vec{V}\cdot d\vec{r}=0$.

$\Leftrightarrow$ A、B为Ω中任意两点，$\int_{L(A)}^{(B)}\vec{V}\cdot d\vec{r}$与路径无关（$L\subset\Omega$）

$\Leftrightarrow \exists\ u(x,y,z)$，$du=Pdx+Qdy+Rdz$.

$\Leftrightarrow \int_{L(A)}^{(B)}\vec{V}\cdot d\vec{r}=u(B)-u(A)$.

小结：数量场的梯度运算：$f\rightarrow \mathrm{grad}f=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

向量场的散度运算：$\vec{V}\rightarrow \mathrm{div}\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

向量场的旋度运算：$\vec{V}\rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$

数量场的梯度运算：场在这点变化最快的方向及变化率.

保守场（有势场）/ 非保守场

势函数 u：$du=Pdx+Qdy+Rdz$.

向量场的散度运算：向量场在这点是否有源

有源场 / 无源场.

向量场的旋度运算：这点场的旋转状态

有旋场 / 无旋场.

例：Maxwell方程组.

$$\left\{\begin{aligned}&\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=c_1\iiint_\Omega \rho\, dV\\ &\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0.\\ &\oint_L \vec{E}\,d\vec{r}=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ &\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{r}=\iint_S \lambda\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}d\vec{S}+\iint_S \mu\vec{j}\cdot d\vec{S}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{E}=\rho\\ &\nabla\cdot\vec{B}=0\\ &\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}\\ &\nabla\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}\end{aligned}\right.$$